**【44】整数解の個数《数学 A》**

$m^2-n^2=10!$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ の個数を求めよ。

/'24 一橋大（経済・ソーシャル・データサイエンス）後期 1

**解 答**

$10!$ を素因数分解すると

$$10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

となるから，$m^2-n^2=10!$ は

$$(m-n)(m+n)=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7 \quad \cdots\cdots ①$$

とできる。ここで

$$(m-n)+(m+n)=2m$$

は偶数であるから，$m-n$ と $m+n$ の偶奇は一致し，① の右辺が偶数なので，$m-n$ と $m+n$ はともに偶数である。したがって

$$a=\frac{m-n}{2},\ \ b=\frac{m+n}{2}$$

とおくと，$a$ と $b$ は $a<b$ を満たす正の整数で，① は

$$ab=2^6\cdot3^4\cdot5^2\cdot7 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。また

$$a+b=m,\ \ -a+b=n$$

だから，組 $(m,\ n)$ と組 $(a,\ b)$ は 1 対 1 に対応する。
ゆえに，① を満たす組 $(m,\ n)$ の個数は，② かつ $a<b$ を満たす組 $(a,\ b)$ の個数に一致する。
② を満たす正の整数の組 $(a,\ b)$ の個数（$a\geqq b$ の場合も含む）は，② の右辺の正の約数の個数に等しく

$$7\cdot5\cdot3\cdot2=210\text{（個）}$$

である。これは，$a>b$ の場合や $a=b$ の場合も含むことになるが，② の右辺は平方数ではないので $a=b$ の場合は存在しない。さらに，$a<b$ の場合と $a>b$ の場合は同数存在するので，求める個数は

$$\frac{210}{2}=\mathbf{105\text{（個）}}$$