【43】不定方程式《数学 A》

$x^2-xy+x-y=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

/'25 東京都市大（情報工，建築都市デザイン，理工）2 月 1 日 1(1)

解 答

与式は

$$\begin{aligned} &x^2-xy+x-y=7 \\ \iff\ &x(x+1)-y(x+1)=7 \\ \iff\ &(x-y)(x+1)=7 \end{aligned}$$

とでき，x と y は整数だから

$$\begin{pmatrix} x-y \\ x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって，求める整数の組 $(x,\ y)$ は

$$\boldsymbol{(6,\ 5),\ (0,\ -7),\ (-8,\ -7),\ (-2,\ 5)}$$

別 解

与式を x についての 2 次方程式と見て

$$\begin{aligned} &x^2-(y-1)x-(y+7)=0 \\ \therefore\ &x=\frac{y-1\pm\sqrt{y^2+2y+29}}{2} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

この x が整数になる為には

$$y^2+2y+29=k^2 \quad \cdots\cdots ②$$

となる 0 以上の整数 k が存在することが必要である。
ここで

$$\begin{aligned} ② &\iff (y+1)^2-k^2=-28 \\ &\iff (y+1-k)(y+1+k)=-28 \end{aligned}$$

とできる。
$y+1-k \leqq y+1+k$ であること，また

$$(y+1-k)+(y+1+k)=2(y+1)$$

が偶数より，$y+1-k$ と $y+1+k$ の偶奇が一致することに注意して

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} y+1-k \\ y+1+k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix} \\ \therefore\ &\begin{pmatrix} y \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

- $y=-7$ のとき，① より

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2}}{2}=0,\ -8$$

- $y=5$ のとき，① より

$$x=\frac{4\pm\sqrt{8^2}}{2}=6,\ -2$$

以上から，求める整数の組 $(x,\ y)$ は

$$\boldsymbol{(0,\ -7),\ (-8,\ -7),\ (6,\ 5),\ (-2,\ 5)}$$