【42】正の約数の総和《数学 A・B》

正の整数 n に対して，その（1 と自分自身も含めた）すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする。このとき，次の問に答えよ。

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。
(2) $s(2016)$ を求めよ。
(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。

/'16 名古屋大（文系）前期 3

解 答

(1) p は 2 とは異なる素数だから

$$\begin{aligned} s(2^k p) &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k)(1 + p) \\ &= \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}(1 + p) \\ &= \boldsymbol{(2^{k+1} - 1)(1 + p)} \end{aligned}$$

(2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ だから

$$\begin{aligned} &s(2016) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) \\ &= 63 \cdot 13 \cdot 8 \\ &= \boldsymbol{6552} \end{aligned}$$

(3) 2016 の正の約数 n は

$$n = 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$$

と表せる。
ただし，x は 0 以上 5 以下，y は 0 以上 2 以下，z は 0 以上 1 以下の整数である。このとき

$$\begin{aligned} &s(n) \\ &= (1 + \cdots + 2^x)(1 + \cdots + 3^y)(1 + \cdots + 7^z) \\ &= \frac{1}{12}(2^{x+1} - 1)(3^{y+1} - 1)(7^{z+1} - 1) \end{aligned}$$

と表せて，これが 2016 に等しいとすると

$$(2^{x+1} - 1)(3^{y+1} - 1)(7^{z+1} - 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7$$

x，y，z の値と，そのときの各因数の値は次表の通り。

$x,\ y,\ z$	0	1	2	3	4	5
$2^{x+1} - 1$	1	3	7	15	31	63
$3^{y+1} - 1$	2	8	26			
$7^{z+1} - 1$	6	48				

この中で 7 の倍数は 7 と 63 だけだから，$x = 2,\ 5$ に限る。

（イ）$x = 2$ の場合

$$(3^{y+1} - 1)(7^{z+1} - 1) = 2^7 \cdot 3^3$$

となるが，表中のどの値を組合わせても適さない。

（ロ）$x = 5$ の場合

$$(3^{y+1} - 1)(7^{z+1} - 1) = 2^7 \cdot 3$$

となり，表から適するのは

$$(y,\ z) = (1,\ 1)$$

である。

以上から，$(x,\ y,\ z) = (5,\ 1,\ 1)$ であり

$$n = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = \boldsymbol{672}$$