【41】正の約数の個数と総和《数学 A・B》

次の問に答えよ。

(1)　自然数 m，n について，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。

(2)　6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ。

/'24 北海道大（文系）前期 1

解答

(1)　自然数 m，n に対して，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数は

$$2^x \cdot 3^y$$

と表せる。ただし，x は 0 以上 m 以下の整数，y は 0 以上 n 以下の整数である。
よって，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数は x，y の組の個数に等しく

$$\boldsymbol{(m+1)(n+1)}\ \textbf{（個）}$$

(2)　6912 を素因数分解すると

$$6912 = 2^8 \cdot 3^3$$

であるから，6912 の正の約数は

$$2^x \cdot 3^y$$

と表せる。ただし，x は 0 以上 8 以下の整数，y は 0 以上 3 以下の整数である。
この中で，12 で割り切れないものは

- $y = 0$ のもの
- $y \neq 0$ かつ $x = 0,\ 1$ のもの

だから，これらの総和は

$$\begin{aligned} &3^0(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^8) + (3^1 + 3^2 + 3^3)(2^0 + 2^1) \\ &= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} + 39 \cdot 3 \\ &= 511 + 117 \\ &= \boldsymbol{628} \end{aligned}$$