

【40】面積（円と対数関数のグラフ）《数学Ⅲ》

座標平面上に、曲線 $D: y = \log x$ ($x > 0$) とその上の点 $A(a, \log a)$ がある。半径 r の円 C は y 軸に接し、かつ、円 C は曲線 D と点 A で同一の接線を持つ。さらに、 $r < a$ が成り立つとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) r を a を用いて表せ。
- (2) $r > \frac{a}{2}$ となることを示せ。
- (3) $a = \sqrt{3}$ のとき、 x 軸、 y 軸、円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積を求めよ。

/'25 千葉大（理系）前期 6

解答

- (1) $f(x) = \log x$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \therefore f'(a) = \frac{1}{a}$$

よって、曲線 D の点 A における法線の傾きは $-a$ である。これと、円 C の中心を P とするとき $|\overrightarrow{AP}| = r$ であることに注意して

$$\overrightarrow{AP} = \frac{r}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

と表せる。

円 C は y 軸に接するから、点 P の x 座標は r である。よって、①の x 成分に注目すると

$$r - a = -\frac{r}{\sqrt{1+a^2}} \quad \therefore r = \frac{a\sqrt{1+a^2}}{1+\sqrt{1+a^2}}$$

- (2) $a > 0$ において

$$\begin{aligned} r - \frac{a}{2} &= \frac{a\sqrt{1+a^2}}{1+\sqrt{1+a^2}} - \frac{a}{2} \\ &= \frac{a(\sqrt{1+a^2}-1)}{2(1+\sqrt{1+a^2})} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ 、 $\sqrt{1+a^2} > 1$ なので②は正である。したがって、 $r > \frac{a}{2}$ が成り立つ。 ■

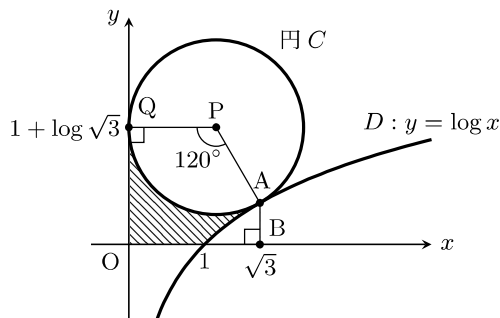
- (3) $a = \sqrt{3}$ のとき、 $A(\sqrt{3}, \log \sqrt{3})$ であり

$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{1+2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となるので、円 C と y 軸の接点を Q とすれば $\angle QPA = 120^\circ$ である。

また、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ より、 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \log \sqrt{3}\right)$ である。

以上から、題意の領域は次図の斜線部分である。



点 $(\sqrt{3}, 0)$ を B とし、求める面積 S は

$S = (\text{五角形 OBAPQ の面積})$

$$- (\text{扇形 PQA の面積}) - \int_1^{\sqrt{3}} \log x \, dx$$

で得られる。ここで、五角形 OBAPQ の面積は

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} \cdot (1 + \log \sqrt{3}) \\ &- \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \left\{ (1 + \log \sqrt{3}) - \log \sqrt{3} \right\} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \log \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} \log \sqrt{3} \end{aligned}$$

であり、扇形 PQA の面積は

$$\frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$$

である。また

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \log x \, dx &= \left[x \log x - x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \log \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

なので、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{5\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} \log \sqrt{3} \\ &\quad - \frac{4\pi}{9} - (\sqrt{3} \log \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1) \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{6} - \frac{4\pi}{9} - 1 \end{aligned}$$