

【39】円と放物線《数学Ⅱ》

$q$  を実数とする。座標平面上に円  $C: x^2 + y^2 = 1$  と放物線  $P: y = x^2 + q$  がある。

- (1)  $C$  と  $P$  に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき、 $q$  の値およびその接点の座標を求めよ。  
 (2) (1) で求めた  $q$  の値を  $q_1$ 、接点の  $y$  座標を  $y_1$  とするとき、連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 + q_1 \\ y \leq y_1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。

/ '23 北海道大(文系) 前期 4

解答

- (1)  $x^2 + y^2 = 1$  と  $y = x^2 + q$  から  $x^2$  を消去すると

$$\begin{aligned} y - q + y^2 &= 1 \\ \therefore \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} - q &= 0 \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

円  $C$  と放物線  $P$  に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき、すなわち、円  $C$  と放物線  $P$  が  $-1 < y < 1$  の範囲で接するとき、 $y$  についての 2 次方程式 (\*) が  $-1 < y < 1$  の範囲に重解をもつので

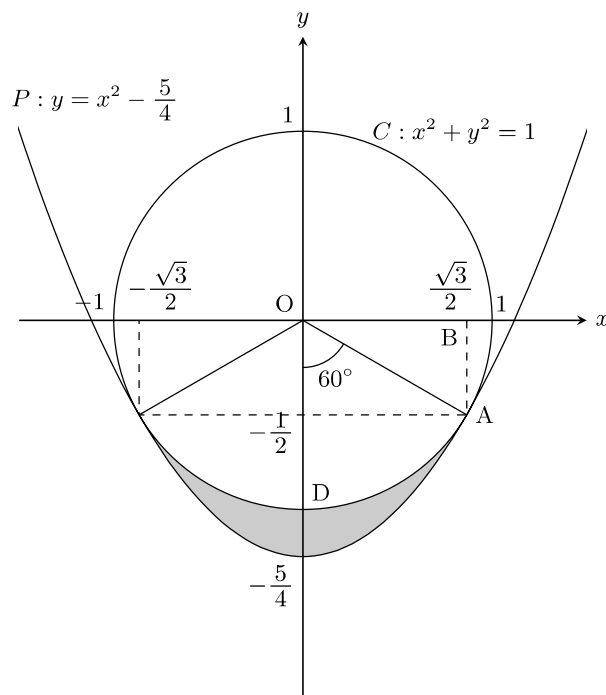
$$-\frac{5}{4} - q = 0 \quad \therefore q = -\frac{5}{4}$$

このとき、(\*) の重解は  $y = -\frac{1}{2}$  なので、円  $C$  の式から

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1 \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

図から、求める接点は  $x > 0$  の方だから

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



- (2) 求める面積は図の灰色部分の面積である。図のように点 A, B, D をとり、求める面積を  $S$  として、対称性に注目すれば

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{5}{4}\right) dx - (\text{扇形 OAD}) - \triangle OAB \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

したがって

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$