

【38】面積の最大値《数学Ⅱ》

a を実数とする。座標平面上の放物線

$$C: y = 2x^2 + 4x + 3$$

と直線

$$L: y = -2ax - a^2$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が (1) の範囲にあるとする。 C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。

/ '19 岡山大 (経済・教育) 前期 4

解答

- (1) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, $g(x) = -2ax - a^2$ とすると

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + (2a + 4)x + (a^2 + 3)$$

であり、 $f(x) - g(x) = 0$ を解くと

$$x = \frac{-a - 2 \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 2}}{2} \quad \dots\dots (*)$$

となる。

したがって、 C と L が異なる 2 点で交わる為の条件は、 $(*)$ が異なる 2 つの実数を表すことだから

$$-a^2 + 4a - 2 > 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$$

- (2) $(*)$ の 2 つの値を α , β ($\alpha < \beta$) とおくと

$$f(x) - g(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)$$

とで、 $\alpha < x < \beta$ において $f(x) - g(x) < 0$ だから、面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{-a^2 + 4a - 2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{-(a - 2)^2 + 2} \right\}^3 \end{aligned}$$

と表せる。これは、 $a = 2$ のとき、最大値

$$S = \frac{1}{3} (\sqrt{2})^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

をとる。