

【37】 3次関数のグラフと面積《数学Ⅱ》

a を正の定数とする。関数 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + a$ の導関数は

$$f'(x) = (\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}})(x - \boxed{\text{ウ}})$$

である。 $f(x)$ は極大値 $a + \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ ，極小値 $a - \boxed{\text{クケ}}$ をとる。方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 個の実数解をもつのは $a = \boxed{\text{コサ}}$ のときである。このとき、

$$f(x) = (x - \boxed{\text{シ}})^2(x + \boxed{\text{ス}})$$

であり、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-\boxed{\text{ス}}}^{\boxed{\text{シ}}} f(x) dx = \frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

/ '25 名城大 (薬) A・F 方式 4

解答

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + a$ から

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = (3x + 1)(x - 3)$$

である。よって、 $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗		↘	↗

したがって、 $f(x)$ は

$$\text{極大値: } f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + 1 + a = a + \frac{14}{27}$$

$$\text{極小値: } f(3) = 27 - 36 - 9 + a = a - 18$$

をとる。

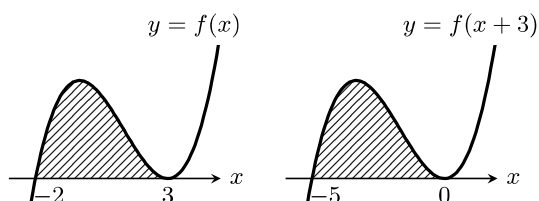
$a > 0$ より $a + \frac{14}{27} > 0$ であることに注意して、方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 個の実数解をもつための条件は「極小値が 0 であること」なので

$$a - 18 = 0 \quad \therefore a = 18$$

このとき

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x - 3)^2(x + 2)$$

とで、 $y = f(x)$ のグラフは次図 (左) のようになる。



よって、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\int_{-2}^3 f(x) dx$ で得られるが、これはグラフ全体と積分区間を x 軸方向に -3 平行移動して (上図 (右) のようにして) も等しいから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 f(x) dx &= \int_{-5}^0 f(x+3) dx \\ &= \int_{-5}^0 x^2(x+5) dx \\ &= \int_{-5}^0 (x^3 + 5x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 \right]_{-5}^0 = \frac{625}{12} \end{aligned}$$

◆◆補足◆◆

最後の面積計算は、部分積分法 (数学Ⅲ) を利用してもよい。

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 f(x) dx &= \int_{-2}^3 (x-3)^2(x+2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-3)^3(x+2) - \frac{1}{12}(x-3)^4 \right]_{-2}^3 \\ &= \frac{1}{12}(-2-3)^4 \\ &= \frac{625}{12} \end{aligned}$$