

【36】四面体の体積《数学 C》

以下の問いに答えよ。

- (1) 空間内の 3 点 A, B, C に対して, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

であることを証明せよ。

- (2) $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 5, -2)$, $C(5, -3, 1)$ のとき $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
 (3) さらに $D(4, 4, -2)$ とするとき, 点 A, B, C を通る平面上の点 H で, $\vec{DH}$ がその平面と垂直になるものを求めよ。
 (4) 上の 4 点を頂点とする四面体 ABCD の体積を求めよ。

/ '07 広島大 (理 (数学)) 後期 2

解答

- (1) $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - |\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

- (2) 3 点の座標から

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので

$$|\vec{AB}|^2 = 14, \quad |\vec{AC}|^2 = 45, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -25$$

よって, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 45 - (-25)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- (3) 点 H は平面 ABC 上にあるので

$$\vec{AH} = s\vec{AB} + t\vec{AC} \quad (s, t: \text{実数})$$

とおける。よって

$$\begin{aligned} \vec{DH} &= \vec{AH} - \vec{AD} \\ &= s\vec{AB} + t\vec{AC} - \vec{AD} \end{aligned}$$

であり, $\vec{DH} \perp \vec{AB}$ かつ $\vec{DH} \perp \vec{AC}$ なので

$$\begin{aligned} \vec{DH} \cdot \vec{AB} &= 0 \quad \text{かつ} \quad \vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \therefore \begin{cases} s|\vec{AB}|^2 + t\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \\ s\vec{AB} \cdot \vec{AC} + t|\vec{AC}|^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, (2) の計算と

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1, \quad \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 0$$

から

$$\begin{cases} 14s - 25t - 1 = 0 \\ -25s + 45t = 0 \end{cases} \quad \therefore (s, t) = (9, 5)$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{DH} &= 9\vec{AB} + 5\vec{AC} - \vec{AD} \\ &= 9 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OH} = \vec{OD} + \vec{DH}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに, 点 H の座標は $(3, 4, 0)$ である。

- (4) (3) から

$$|\vec{DH}| = \sqrt{5}$$

なので, 四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot |\vec{DH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{6}$$