

【34】外心をさすベクトル《数学C》

三角形 ABC において、 $AB = 3$ 、 $BC = \sqrt{7}$ 、 $CA = 2$ とし、外心を O とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき、次の (1)、(2) に答えよ。

(1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。

/ '21 福井県立大（経済）後期 2

解答

(1) 三角形 ABC における余弦定理より

$$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB$$

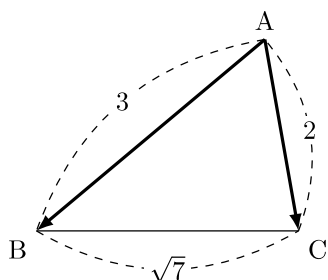
が成り立ち、内積の定義から

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB$$

なので

$$7 = 9 + 4 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\therefore \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$



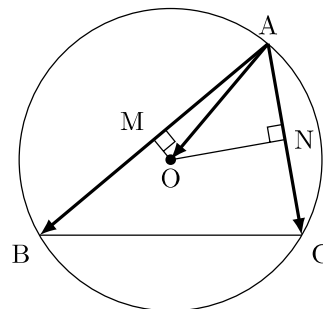
(2) 外心 O から辺 AB に下ろした垂線の足 M は、辺 AB の中点である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AO}| \cos \angle OAB \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AM}| \\ &= 3 \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

同様に、辺 AC の中点を N として

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AN}| \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。



したがって、実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{AO} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{9}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} \cdot (x\vec{b} + y\vec{c}) = \frac{9}{2} \\ \vec{c} \cdot (x\vec{b} + y\vec{c}) = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x|\vec{b}|^2 + y\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{9}{2} \\ x\vec{b} \cdot \vec{c} + y|\vec{c}|^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 3y = \frac{9}{2} \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

よって

$$x = \frac{4}{9}, \quad y = \frac{1}{6}$$

であるから

$$\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

◆◆補足◆◆

$|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$ から求めることもできる。