

【32】平面と直線の交点《数学 C》

a を実数とする。空間内の 3 点 $A(2, 1, 3)$, $B(a+2, 3, 4)$, $C(1, 0, 0)$ を含む平面を H とし、2 点 $D(-1, 2, 1)$, $E(-3, 1, 0)$ を通る直線を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 H が直線 DE と共有点をもつための、 a の条件を求めよ。
- (2) 平面 H が線分 DE (両端を含む) と共有点をもつための、 a の条件を求めよ。

/'26 名古屋大 (理系) 前期 2

解答

- (1) 平面 H 上の任意の点 P は

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t: \text{実数})$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+as-t \\ 1+2s-t \\ 3+s-3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

直線 DE 上の任意の点 Q は

$$\overrightarrow{DQ} = k\overrightarrow{DE} \quad (k: \text{実数})$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{DE} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1-2k \\ 2-k \\ 1-k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

平面 H と直線 DE が共有点をもつことは、点 P と点 Q が一致するような s, t, k が存在すること、すなわち

$$\begin{cases} 2+as-t = -1-2k & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 1+2s-t = 2-k & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3+s-3t = 1-k & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を満たす s, t, k が存在することと同値である。

② ③ を s, t についての連立方程式と見て解けば

$$(s, t) = \left(\frac{5-2k}{5}, \frac{5+k}{5} \right)$$

となるから、実数 k が存在すれば実数 s, t も存在する。

このとき ① から

$$\begin{aligned} 2+a \cdot \frac{5-2k}{5} - \frac{5+k}{5} &= -1-2k \\ \therefore k(-2a+9) + (5a+10) &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

とできるので、この ①' を満たす実数 k が存在する為の条件は

$$-2a+9 \neq 0 \quad \therefore a \neq \frac{9}{2}$$

- (2) $f(k) = k(-2a+9) + (5a+10)$ とする。

平面 H と線分 DE が共有点をもつことは、「①' かつ $0 \leq k \leq 1$ 」を満たす実数 k が存在することと同値である。その為の条件は、 $f(0)f(1) \leq 0$ が成り立つことなので

$$\begin{aligned} (5a+10)(3a+19) &\leq 0 \\ \therefore -\frac{19}{3} &\leq a \leq -2 \end{aligned}$$