

【31】平面と直線の交点《数学C》

四面体 OABC において、P を辺 OA の中点、Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点、R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
 (2) 比 $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}|$ を求めよ。

/ '16 神戸大 (理系) 前期 1 《略題》

解答

- (1) 条件から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

- (2) 点 S は平面 PQR 上にあるので

$$\overrightarrow{PS} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \quad (s, t : \text{実数})$$

とおける。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + s\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\ &\quad + t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{OA} \\ &\quad + \left(\frac{2s}{3} + \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{t}{2}\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

また、点 S は辺 AC 上にあるので

$$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AC} \quad (k : \text{実数})$$

とおける。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は一次独立なので、① ② を比べて

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} = 1 - k \\ \frac{2s}{3} + \frac{t}{2} = 0 \\ \frac{t}{2} = k \end{cases}$$

これを解いて

$$s = -1, \quad t = \frac{4}{3}, \quad k = \frac{2}{3}$$

したがって

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

となるから

$$|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}| = 2 : 1$$

