

【30】直線と直線の交点《数学 C》

△OAB の重心を G, OA を 1:3 に内分する点を P, 直線 PG と直線 AB の交点を Q とする。

$$(2) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{20}}{\boxed{21}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{22}}{\boxed{23}} \overrightarrow{OB}$$

/ '26 青山学院大 (理工) A 方式 2 月 10 日 2 《略題》

解答

OA を 1:3 に内分する点が P なので

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA}$$

△OAB の重心が G なので

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$$

したがって

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{12} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB}$$

さて, 点 Q は条件

$$\begin{cases} \text{点 Q は直線 PG 上にある} & \dots\dots \text{①} \\ \text{点 Q は直線 AB 上にある} & \dots\dots \text{②} \end{cases}$$

で定まる。

① より, $\overrightarrow{PQ} = k \overrightarrow{PG}$ (k : 実数) とおけるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{PG} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + k \left(\frac{1}{12} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} k \right) \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} k \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \text{①}' \end{aligned}$$

② より, $\overrightarrow{AQ} = \ell \overrightarrow{AB}$ (ℓ : 実数) とおけるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{OA} + \ell \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \ell (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1 - \ell) \overrightarrow{OA} + \ell \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \text{②}' \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立なので, ①' と ②' を比べて

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{12} k = 1 - \ell \\ \frac{1}{3} k = \ell \end{cases} \quad \therefore (k, \ell) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

したがって, ①' (もしくは ②') より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{5} \right) \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

