

【29】始点変換（面積比）《数学 C》

平面に三角形 ABC と点 P があり、

$$4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

をみたすとき、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 、 S_3 とする。このとき $S_1 : S_2 : S_3$ を最も簡単な整数の比で表せ。

/’26 札幌医科大（医）前期 1(1)

解答

$4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ から

$$4(-\overrightarrow{AP}) + 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 6(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$$

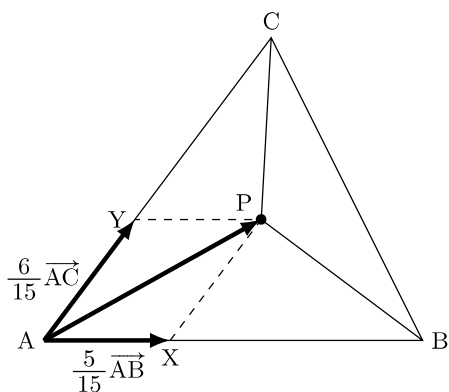
$$\iff -15\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\iff \overrightarrow{AP} = \frac{5}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{15}\overrightarrow{AC}$$

とできるので、点 P は次図のような位置にある。ただし、点 X、Y は

$$\overrightarrow{AX} = \frac{5}{15}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AY} = \frac{6}{15}\overrightarrow{AC}$$

を満たす。



このとき、 $YP \parallel AB$ なので

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle PAB \\ &= \triangle YAB \\ &= \frac{AY}{AC} \triangle ABC \\ &= \frac{6}{15} \triangle ABC \end{aligned}$$

である。同様に、 $XP \parallel AC$ なので

$$S_3 = \triangle PCA = \frac{5}{15} \triangle ABC$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle PBC \\ &= \left(1 - \frac{6}{15} - \frac{5}{15}\right) \triangle ABC = \frac{4}{15} \triangle ABC \end{aligned}$$

以上から

$$S_1 : S_2 : S_3 = \frac{6}{15} : \frac{4}{15} : \frac{5}{15} = 6 : 4 : 5$$