

【28】正五角形《数学 A（中学数学？）》

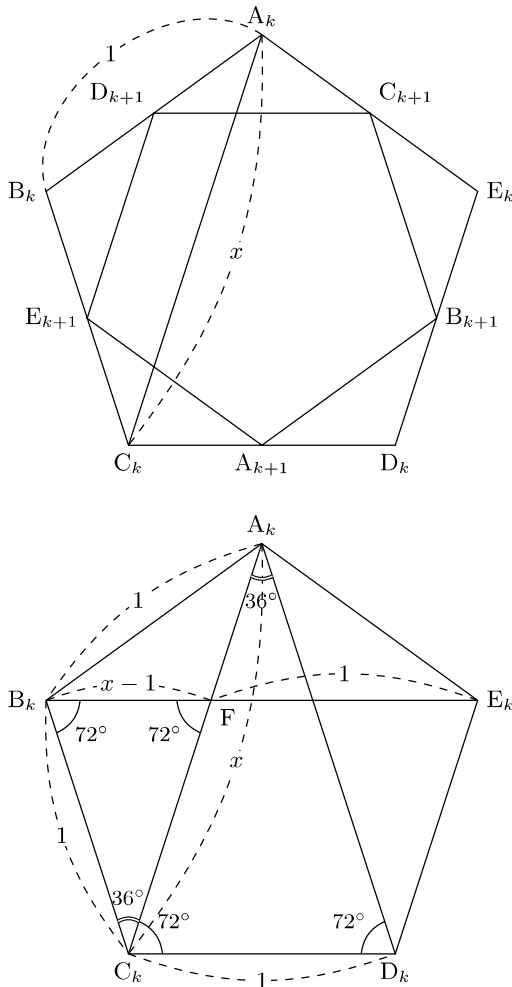
正五角形  $P$  の各辺の中点を順に結んでできる、 $P$  に内接する正五角形を  $P(1)$  とする。この操作をくり返してできる正五角形を  $P(2)$ ,  $P(3)$ ,  $\dots$  とするとき、 $P(n)$  の面積が  $P$  の面積の  $\frac{1}{3}$  より小さくなる最小の  $n$  を求めなさい。

/ '18 福島大（人文社会学群）前期 5

解答

正五角形  $P(k)$  と  $P(k+1)$  の各頂点を下図のようにとる。

正五角形  $P(k)$  の 1 辺の長さを 1 とし、対角線の長さを  $x$  とおく。



正五角形  $P(k)$  において、対角線  $A_kC_k$  と  $B_kE_k$  の交点を  $F$  とすると、 $\triangle A_kC_kD_k \sim \triangle C_kFB_k$  だから

$$A_kC_k : C_kB_k = C_kD_k : B_kF$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} x : 1 &= 1 : (x - 1) \iff x^2 - x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$x > 0$  なので

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

正五角形  $P(k)$  の各辺の中点を結んで正五角形  $P(k+1)$  を作るので

$$D_{k+1}E_{k+1} = \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

である。よって、 $P(k)$  に対する  $P(k+1)$  の相似比は  $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$  であり、面積比は

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$$

である。

したがって、正五角形  $P$  の面積を  $S$ 、正五角形  $P(k)$  の面積を  $S_k$  とするとき

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{3 + 2. \dots}{8} \\ &= \frac{5. \dots}{8} > \frac{1}{3} \\ \frac{S_2}{S} &= \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \right)^2 \\ &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{32} \\ &= \frac{7 + 6. \dots}{32} \\ &= \frac{13. \dots}{32} > \frac{1}{3} \\ \frac{S_3}{S} &= \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \right)^3 \\ &= \frac{9 + 4\sqrt{5}}{64} \\ &= \frac{9 + 8. \dots}{64} \\ &= \frac{17. \dots}{64} < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上から、求める  $n$  の値は

$$n = 3$$