

【27】相似の利用《数学Ⅰ・A》

円に内接する四角形 ABCD について、各辺の長さが

$$AB = 5, BC = 6, CD = 2, DA = 3$$

であるとする。以下の問に答えよ。

- (1) 対角線 AC の長さは $\sqrt{\boxed{1}\boxed{2}}$ 。また、 $\cos \angle ABC = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ 。
- (2) 四角形 ABCD の面積は $\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}$ 。
- (3) 直線 AB と直線 CD は平行ではないので、1 点で交わる。この交点を E とおくと、 $EB = \boxed{7}$ 。
- (4) 点 E から四角形 ABCD に外接する円に接線を 2 本引き、それぞれの接点を P, Q とおくと、 $EP = EQ = \boxed{8}\sqrt{\boxed{9}}$ 。

/ '16 関東学院大（理工・教育・経済・他）前期 3

解答

(1) $\theta = \angle ABC$ において、三角形 ABC における余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \theta \\ \therefore AC^2 &= 61 - 60 \cos \theta \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

三角形 ACD における余弦定理より

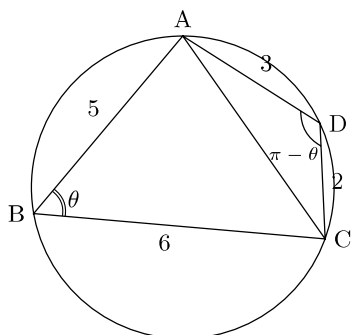
$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(\pi - \theta) \\ \therefore AC^2 &= 13 + 12 \cos \theta \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

① ② から、 AC^2 を消去すれば

$$\begin{aligned} 61 - 60 \cos \theta &= 13 + 12 \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

このとき、② から

$$\begin{aligned} AC^2 &= 13 + 12 \cdot \frac{2}{3} = 21 \\ \therefore AC &= \sqrt{21} \end{aligned}$$



(2) $\cos \theta = \frac{2}{3}$ から

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。したがって、四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(\pi - \theta) \\ &= 15 \sin \theta + 3 \sin \theta \\ &= 18 \sin \theta \\ &= 18 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

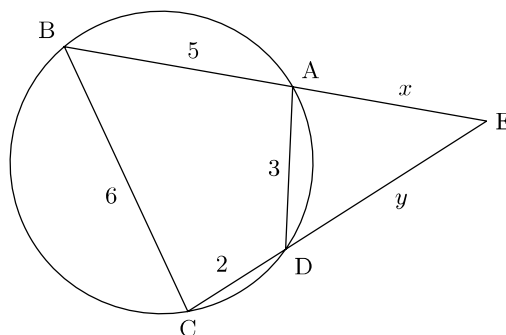
(3) $x = EA, y = ED$ とおく。

$\triangle EAD \sim \triangle ECB$ より

$$\begin{aligned} EA : EC &= AD : CB = DE : BE \\ \iff x : (y + 2) &= 3 : 6 = y : (x + 5) \\ \iff \begin{cases} x : (y + 2) = 1 : 2 \\ y : (x + 5) = 1 : 2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2x = y + 2 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \\ \iff (x, y) &= (3, 4) \end{aligned}$$

したがって

$$EB = x + 5 = 8$$



(4) $\Delta\text{EBP} \propto \Delta\text{EPA}$ から

$$EB : EP = EP : EA$$

$$\Longleftrightarrow 8 : \text{EP} = \text{EP} : 3$$

$$\iff \text{EP}^2 = 24$$

したがって

$$\text{EP} = 2\sqrt{6}$$

