【24】対数方程式《数学 II》

x の方程式

$$\log_3(x-2)=\log_9(2x^2-12x-a+23)$$

を考える。$a=5$ のとき，この方程式の解は $x=$ ウ$\boxed{}$ である。また，この方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲は エ$\boxed{}$ である。

/'24 名城大（薬）A 方式・F 方式 1(2)

解答

真数条件より

$$\begin{cases} x-2>0 & \cdots ① \\ 2x^2-12x-a+23>0 & \cdots ② \end{cases}$$

このもとで

$$\begin{aligned} &\log_3(x-2)=\log_9(2x^2-12x-a+23) \\ &\iff \log_9(x-2)^2=\log_9(2x^2-12x-a+23) \\ &\iff (x-2)^2=2x^2-12x-a+23 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，「① かつ ③」が成り立つとき ② も成り立つので，与方程式は「① かつ ③」と同値である。さらに

$$① かつ ③ \iff \begin{cases} x>2 & \cdots ①' \\ x^2-8x+19-a=0 & \cdots ③' \end{cases}$$

とできる。

$a=5$ のとき，③$'$ から

$$x^2-8x+14=0 \qquad \therefore\ x=4\pm\sqrt{2}$$

となり，これらはともに ①$'$ を満たすので，求める解は

$$x=\boldsymbol{4\pm\sqrt{2}}$$

また，③$'$ は

$$(x-4)^2+3=a$$

とできるので，与方程式が異なる 2 つの実数解をもつことは，放物線 $y=(x-4)^2+3$ と直線 $y=a$ が $x>2$ の範囲において異なる 2 点で交わることと同値であり，その条件は下のグラフより

$$\boldsymbol{3<a<7}$$