【23】対数不等式《数学 II》

次の不等式を解くと，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

$$2\log_4(x+2)+\log_{\sqrt{2}}(x-1)<1$$

/'25 神戸薬科大（薬）前期 2 月 4 日 1(3)

解 答

真数条件「$x+2>0$ かつ $x-1>0$」すなわち

$$x>1$$

のもとで，与式の左辺は

$$\begin{aligned}&2\log_4(x+2)+\log_{\sqrt{2}}(x-1)\\&=\log_4(x+2)^2+\log_2(x-1)^2\\&=\log_2(x+2)+\log_2(x-1)^2\\&=\log_2(x+2)(x-1)^2\\&=\log_2(x^3-3x+2)\end{aligned}$$

とできるから

$$\begin{aligned}&2\log_4(x+2)+\log_{\sqrt{2}}(x-1)<1\\&\iff\begin{cases}x>1\\\log_2(x^3-3x+2)<\log_2 2\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x>1\\x^3-3x+2<2\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x>1 & \cdots\cdots ①\\x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0 & \cdots\cdots ②\end{cases}\end{aligned}$$

ここで，① のもとで $x(x+\sqrt{3})>0$ なので

$$② \iff x-\sqrt{3}<0 \iff x<\sqrt{3}$$

である。

したがって，求める x の値の範囲は

$$x>1 \text{ かつ } x<\sqrt{3} \qquad \therefore\ \boldsymbol{1<x<\sqrt{3}}$$