【22】指数の絶対不等式《数学 II》

不等式

$$4 \cdot 9^x + a \cdot 3^x > a - 2$$

が常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

/'25 福島大（農学群）前期 2(2)

解 答

$t = 3^x$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $t > 0$ であり，$t^2 = 9^x$ であるから，不等式

$$4 \cdot 9^x + a \cdot 3^x > a - 2 \quad \cdots\cdots ①$$

は

$$4t^2 + at - a + 2 > 0 \quad \cdots\cdots ②$$

とできる。

$f(t) = 4t^2 + at - a + 2$ とすると

$$f(t) = 4\left(t + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} - a + 2$$

である。このとき，不等式 ① がつねに成り立つことは，「$t > 0$ において不等式 ② がつねに成り立つこと」と同値である。

イ）$-\dfrac{a}{8} \leqq 0$ すなわち $0 \leqq a$ の場合

$t > 0$ において不等式 ② がつねに成り立つ為の条件は

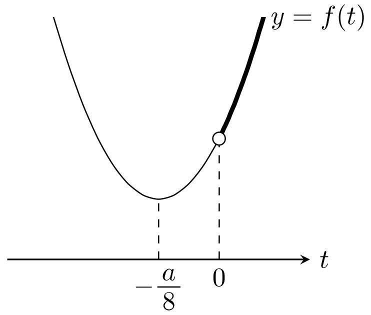
$$f(0) \geqq 0$$

である。これより

$$-a + 2 \geqq 0 \qquad \therefore\ a \leqq 2$$

$0 \leqq a$ との共通部分を考えて

$$0 \leqq a \leqq 2 \quad \cdots\cdots ③$$



ロ）$0 < -\dfrac{a}{8}$ すなわち $a < 0$ の場合

$t > 0$ において不等式 ② がつねに成り立つ為の条件は

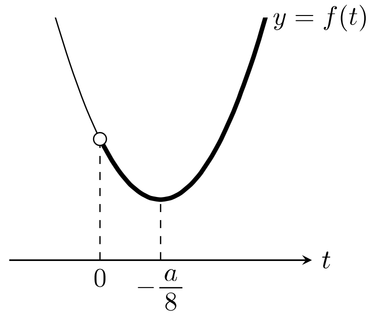
$$f\left(-\frac{a}{8}\right) > 0$$

である。これより

$$-\frac{a^2}{16} - a + 2 > 0$$
$$\iff a^2 + 16a - 32 < 0$$
$$\iff -8 - 4\sqrt{6} < a < -8 + 4\sqrt{6}$$

$a < 0$ との共通部分を考えて

$$-8 - 4\sqrt{6} < a < 0 \quad \cdots\cdots ④$$



以上から，求める a の値の範囲は ③ または ④，すなわち

$$\boldsymbol{-8 - 4\sqrt{6} < a \leqq 2}$$

である。