【21】指数方程式《数学 II》

$2^x=X$ とおくとき，$4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}$ を X の式で表すと，$\boxed{\text{イ}}$ となる。
したがって，$4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}=0$ を満たす x の値は，$x=\boxed{\text{ウ}}$ である。

/'25 関西学院大（理，工など）2 月 1 日 1(2)

解 答

$2^x=X$ とおくとき，X のとり得る値の範囲は $X>0$ であり

$$\begin{aligned}&4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}\\&=(2^x)^2+2^x\cdot 2^1-8-16\cdot\frac{1}{2^x}\\&=\boldsymbol{X^2+2X-8-\frac{16}{X}}\end{aligned}$$

となる。
したがって，まず，$X^2+2X-8-\dfrac{16}{X}=0$ となる正の実数 X を求める。$X>0$ のもとで

$$\begin{aligned}&X^2+2X-8-\frac{16}{X}=0\\&\iff X^3+2X^2-8X-16=0\\&\iff (X+2)(X^2-8)=0\\&\iff (X+2)(X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2})=0\end{aligned}$$

であるから，正の実数 X は $X=2\sqrt{2}$ である。ゆえに

$$2^x=2\sqrt{2}\ \left(=2^{\frac{3}{2}}\right)\qquad \therefore\ \boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$$