【20】隣接３項間漸化式《数学 B》

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_2=5$，および，すべての自然数 n に対して，

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-4$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

/'22 高知大（理工，医（医））前期 1《略題》

解 答

(1) $a_1=1$，$a_2=5$ と漸化式から

$$\begin{aligned}a_3&=4a_2-3a_1-4\\&=20-3-4\\&=\mathbf{13}\\a_4&=4a_3-3a_2-4\\&=52-15-4\\&=\mathbf{33}\\a_5&=4a_4-3a_3-4\\&=132-39-4\\&=\mathbf{89}\end{aligned}$$

(2) $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-4 \quad \cdots\cdots (*)$ を

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}+\beta=r(a_{n+1}-\alpha a_n+\beta) \quad \cdots\cdots (*)'$

に変形したい。このとき，$(*)'$ は

$$a_{n+2}=(\alpha+r)a_{n+1}-\alpha r a_n+\beta(r-1)$$

となるので，$(*)$ と比べて

$$\begin{cases}\alpha+r=4 & \cdots\cdots ①\\ \alpha r=3 & \cdots\cdots ②\\ \beta(r-1)=-4 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

① ② を満たす α，r の組は

$$(\alpha,\ r)=(3,\ 1),\ (1,\ 3)$$

であるが，③ を考慮すると $r\neq1$ なので

$$(\alpha,\ \beta,\ r)=(1,\ -2,\ 3)$$

である。
よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n-2\}$ が公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n-2=(a_2-a_1-2)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$$
$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2\cdot3^{n-1}+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{2\cdot3^{n-1}+2\}$ であるから，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot3^{k-1}+2)\\&=1+2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+2(n-1)\\&=3^{n-1}+2n-2\end{aligned}$$

この式は $a_1=1$ を満たすので，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において

$$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+2n-2}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1}+2k-2)\\&=\frac{3^n-1}{3-1}+\frac{1}{2}n\{0+(2n-2)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot3^n-\frac{1}{2}+n^2-n}\end{aligned}$$