【19】対数の利用《数学 B》

正の実数の列 $\{a_n\}$ が次の条件によって定められている。

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}=\frac{3^n {a_{n+1}}^2}{a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

/'26 大阪大（文系）前期 1

解 答

(1)　すべての n に対して $a_n>0$ なので

$$\begin{aligned}
&a_{n+2}=\frac{3^n {a_{n+1}}^2}{a_n}\\
&\iff \log_2 a_{n+2}=\log_2\frac{3^n {a_{n+1}}^2}{a_n}\\
&\iff \log_2 a_{n+2}=n\log_2 3+2\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n\\
&\iff \log_2 a_{n+2}-\log_2 a_{n+1}\\
&\qquad\qquad =\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n+n\log_2 3
\end{aligned}$$

よって，$b_n=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき

$$b_{n+1}=b_n+n\log_2 3\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。したがって，数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{n\log_2 3\}$ である。また

$$b_1=\log_2 a_2-\log_2 a_1=\log_2 2-\log_2 1=1$$

であるから，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において

$$\begin{aligned}
b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k\log_2 3\\
&=1+\frac{1}{2}(n-1)n\log_2 3
\end{aligned}$$

となる。この結果は $b_1=1$ を満たすので，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において

$$\boldsymbol{b_n=1+\frac{1}{2}(n-1)n\log_2 3}$$

(2)　(1) の結果は

$$\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)n\log_2 3$$

とできるので，数列 $\{\log_2 a_n\}$ の階差数列が $\left\{1+\dfrac{1}{2}(n-1)n\log_2 3\right\}$ である。また

$$\log_2 a_1=\log_2 1=0$$

であるから，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において

$$\begin{aligned}
\log_2 a_n&=\log_2 a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\frac{1}{2}(k-1)k\log_2 3\right\}\\
&=0+n-1+\frac{1}{2}\log_2 3\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k
\end{aligned}$$

とできる。ここで

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{-(k-2)(k-1)k+(k-1)k(k+1)\}\\
&=\frac{1}{3}\{-(-1)\cdot 0\cdot 1+(n-2)(n-1)n\}\\
&=\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\log_2 a_n&=n-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n\cdot\log_2 3\\
&=\log_2\left(2^{n-1}\cdot 3^{\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n}\right)
\end{aligned}$$

となる。この結果は $\log_2 a_1=0$ を満たすので，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}\cdot 3^{\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n}}$$

◆◆補足◆◆

もとの漸化式の両辺を a_{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=3^n\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

とできるので，数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ の階比数列が $\{3^n\}$ であると考えてもよい。