【18】漸化式（階差への誘導）《数学 B》

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2) $b_n=2^{-n}a_n$ とおくとき，b_n と b_{n+1} の関係式を求めよ。

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n を n の式で表せ。

/'25 小樽商科大（商）前期 2

解 答

(1) $a_1=1$ と漸化式から

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1+(-1)^1 \\ &= 2+(-1) \\ &= \mathbf{1} \\ a_3 &= 2a_2+(-1)^2 \\ &= 2+1 \\ &= \mathbf{3} \\ a_4 &= 2a_3+(-1)^3 \\ &= 6+(-1) \\ &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

(2) 漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となるので，$b_n=2^{-n}a_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき

$$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

となる。

(3) (2) の結果から，数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ なので，$n\geqq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{a_1}{2^1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ から

$$a_n=2^nb_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n$$

とでき，これは $a_1=1$ に適する。

したがって，$n\geqq 1$ において

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n}$$

◆◆◆補足◆◆◆

(2) の誘導を無視してもいいなら，もとの漸化式を

$$a_{n+1}+\alpha(-1)^{n+1}=2\left\{a_n+\alpha(-1)^n\right\}$$

に変形することを考えてもよい。この式は

$$a_{n+1}=2a_n+3\alpha(-1)^n$$

とできるので，もとの漸化式と比較して

$$3\alpha=1 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{1}{3}$$

よって，数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{3}\cdot(-1)^n\right\}$ が公比 2 の等比数列なので

$$\begin{aligned} &a_n+\frac{1}{3}\cdot(-1)^n=\left\{a_1+\frac{1}{3}\cdot(-1)\right\}\cdot 2^{n-1} \\ &\therefore\ a_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n \end{aligned}$$

とできる。