【17】カタマリ等比数列をねらう《数学 B》

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 1\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = 2b_n + n\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $c_1 = 2,\ c_{n+1} = 2c_n + \dfrac{1}{2}n(n-1)\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

/'08 同志社大（文・商）2 月 6 日 2

解 答

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 1\quad \cdots\cdots$ ① を

$$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$$

に変形したい。これは

$$a_{n+1} = 2a_n - \alpha$$

とできるので，① と比べて

$$-\alpha = 1 \qquad \therefore\ \ \alpha = -1$$

よって，数列 $\{a_n + 1\}$ が公比 2 の等比数列なので

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= (a_1 + 1)\cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n+1} \quad (\because\ \ a_1 = 3) \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 1}$$

(2) $b_{n+1} = 2b_n + n\quad \cdots\cdots$ ② を

$$b_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(b_n + \alpha n + \beta)$$

に変形したい。これは

$$b_{n+1} = 2b_n + \alpha n - \alpha + \beta$$

とできるので，② と比べて

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ \ (\alpha,\ \beta) = (1,\ 1)$$

よって，数列 $\{b_n + n + 1\}$ が公比 2 の等比数列なので

$$\begin{aligned} b_n + n + 1 &= (b_1 + 1 + 1)\cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n+1} \quad (\because\ \ b_1 = 3) \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{b_n = 2^{n+1} - n - 1}$$

(3) $c_{n+1} = 2c_n + \dfrac{1}{2}n(n-1)\quad \cdots\cdots$ ③ を

$$\begin{aligned} &c_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma \\ &\qquad = 2(c_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma) \end{aligned}$$

に変形したい。これは

$$c_{n+1} = 2c_n + \alpha n^2 + (-2\alpha + \beta)n + (-\alpha - \beta + \gamma)$$

とできるので，③ と比べて

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ -2\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2} \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

よって，数列 $\left\{c_n + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n + 1\right\}$ が公比 2 の等比数列なので

$$\begin{aligned} c_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 &= \left(c_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)\cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n+1} \quad (\because\ \ c_1 = 2) \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{c_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1}$$