【16】コーシー・シュワルツの不等式《数学 II》

実数 x，y，z が $x^2+y^2+z^2=18$ を満たしながら変化するとき，$2x+y+2z$ が最小値をとるのは，$(x,\ y,\ z)=\boxed{\text{⑦}}$ のときである。

/'19 関西大（システム理工，環境都市工，化学生命工）2 月 2 日 4(5)

解 答

一般に，実数 a，b，c，x，y，z に対して不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

が成り立ち，等号成立条件は

$$a:b:c=x:y:z$$

である。（コーシー・シュワルツの不等式）

したがって

$$a=2,\ \ b=1,\ \ c=2,\ \ x^2+y^2+z^2=18$$

とすると

$$9\cdot 18 \geqq (2x+y+2z)^2$$

$$\therefore\ \ -9\sqrt{2} \leqq 2x+y+2z \leqq 9\sqrt{2}$$

ここで，$-9\sqrt{2} \leqq 2x+y+2z$ の等号成立条件は

$$\begin{cases} 2:1:2=x:y:z & \cdots\cdots ① \\ 2x+y+2z=-9\sqrt{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である。

① から

$$x=2k,\quad y=k,\quad z=2k\quad (k:\text{実数})$$

とおけて，これらを ② に代入すれば

$$4k+k+4k=-9\sqrt{2}\qquad \therefore\ \ k=-\sqrt{2}$$

以上から，$2x+y+2z$ が最小値 $-9\sqrt{2}$ をとるような $(x,\ y,\ z)$ は

$$(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{(-2\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})}$$