

【15】相加・相乗の利用《数学Ⅱ》

$x > 0$ のとき、 $\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値を求めなさい。

/'25 岩手県立大 (ソフトウェア情報) 前期 1(5)

解答

$x > 0$ のとき、 $t = x + 2$ とおくと $t > 2$ であり

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+2x+16} &= \frac{t}{(t-2)^2+2(t-2)+16} \\ &= \frac{t}{t^2-2t+16} \\ &= \frac{1}{t-2+\frac{16}{t}} \end{aligned}$$

相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} t + \frac{16}{t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{16}{t}} = 8 \\ \therefore t - 2 + \frac{16}{t} &\geq 6 \\ \therefore \frac{1}{t - 2 + \frac{16}{t}} &\leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

等号成立条件は

$$t > 2 \text{ かつ } t = \frac{16}{t} \quad \therefore t = 4$$

以上から、求める最大値は $\frac{1}{6}$ である。

別解 (数学Ⅲの微分法を利用)

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+16}$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+2x+16) - (x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+16)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x+12}{(x^2+2x+16)^2} \\ &= \frac{(x+6)(-x+2)}{(x^2+2x+16)^2} \end{aligned}$$

ここで、 $x > 0$ のとき $\frac{x+6}{(x^2+2x+16)^2} > 0$ なので、 $f'(x)$ の符号は $-x+2$ の符号に一致し、 $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	(0)	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗		↘

したがって、求める最大値は

$$f(2) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$