【14】３次関数の最小値（場合分け）《数学 II》

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし，$a>0$ とする。

(1) $f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ。

(3) $-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

/'10 筑波大（全学類）前期 1

解 答

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ から

$$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a,\quad f(3)=9-\frac{9}{2}a$$

なので

$$\begin{aligned}f(-1)\leqq f(3)&\iff -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a\\&\iff a\leqq\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$a>0$ も考慮して，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{0<a\leqq\frac{7}{3}}$$

(2) $f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$ であり，$a>0$ なので，$f(x)$ の増減は次表の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，極小値は

$$f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3=-\frac{1}{6}a^3$$

である。したがって

$$\begin{aligned}(\text{極小値})\leqq f(-1)&\iff -\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\\&\iff a^3-3a-2\geqq 0\\&\iff (a+1)^2(a-2)\geqq 0\end{aligned}$$

$a>0$ も考慮して，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2\leqq a}$$

(3) a の値で場合を分ける。

イ）$0<a\leqq 3$ の場合

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(x)$ の最小値の候補は $f(-1)$ と $f(a)$ である。ここで，(2) により

$$\begin{aligned}f(a)\geqq f(-1)&\iff 0<a\leqq 2\\f(a)\leqq f(-1)&\iff 2\leqq a\end{aligned}$$

なので，最小値は

$0<a\leqq 2$ のとき $f(-1)$

$2\leqq a\leqq 3$ のとき $f(a)$

ロ）$3\leqq a$ の場合

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，最小値の候補は $f(-1)$ と $f(3)$ であるが，(1) により，$3\leqq a$ のとき $f(-1)\geqq f(3)$ なので，最小値は $f(3)$ である。

以上から，求める最小値は

$$\boldsymbol{\begin{cases}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3} & (0<a\leqq 2)\\[2mm]-\dfrac{1}{6}a^3 & (2\leqq a\leqq 3)\\[2mm]-\dfrac{9}{2}a+9 & (3\leqq a)\end{cases}}$$