【13】３次関数の最大・最小《数学 II》

$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ の最大値 M と最小値 m を求めると，$(M,\ m) = \boxed{(ア)}$ である。

/'25 小樽商科大（商）前期 3(1)

解 答

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

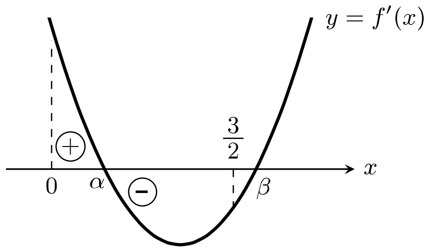
ここで，$f'(x) = 0$ とすると

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad \therefore\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

したがって，$y = f'(x)$ のグラフは次図のようになる。ただし

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

である。



よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ における $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(x)$ を $\dfrac{f'(x)}{3} = x^2 - 2x + \dfrac{2}{3}$ で割ることで

$$f(x) = \frac{f'(x)}{3}(x-1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

とできるので，最大値 M は

$$\begin{aligned} M &= \frac{f'(\alpha)}{3}(\alpha - 1) - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3} \quad (\because\ \ f'(\alpha) = 0) \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

また

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

なので，最小値 m は

$$m = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

以上から

$$(M,\ m) = \left(\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}},\ \boldsymbol{-\frac{3}{8}}\right)$$

別 解

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ は

$$f(x) = (x-1)^3 - (x-1)$$

とできるので，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ における最大値と最小値は

$$g(x) = x^3 - x$$

の $-1 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における最大値と最小値に一致する。$g'(x) = 3x^2 - 1$ なので，増減は次表の通り。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，最大値 M は

$$M = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

また

$$g(-1) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

であるから，最小値 m は

$$m = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

以上から

$$(M,\ m) = \left(\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}},\ \boldsymbol{-\frac{3}{8}}\right)$$