

【12】絶対不等式

次の条件を満たすような実数 a の範囲を求めよ。

(条件)：どんな実数 x に対しても

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \text{または} \quad x^2 + ax + 1 > 0$$

が成立する。

/'15 学習院大 (経済) 2月7日 3

解答

不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ を解くと

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < 1, 2 < x$$

であるから、(条件)は「 $1 \leq x \leq 2$ のすべての x に対して $x^2 + ax + 1 > 0$ が成立すること」と同値である。

$f(x) = x^2 + ax + 1$ とすると

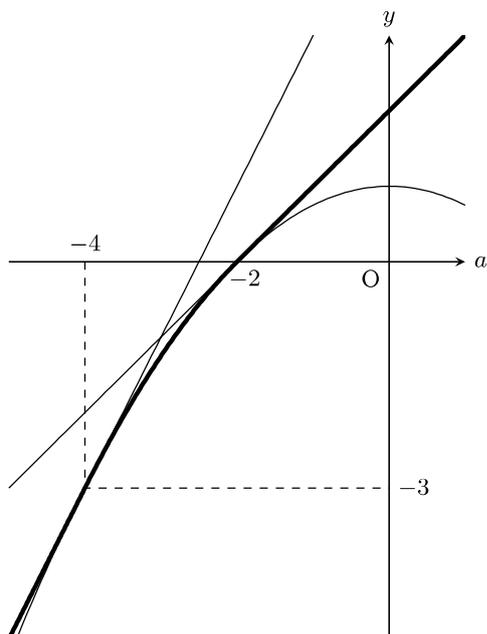
$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 1$$

なので、 $1 \leq x \leq 2$ における最小値 $m(a)$ は

$$m(a) = \begin{cases} f(1) & \left(-\frac{a}{2} \leq 1\right) \\ f\left(-\frac{a}{2}\right) & \left(1 \leq -\frac{a}{2} \leq 2\right) \\ f(2) & \left(2 \leq -\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a+2 & (-2 \leq a) \\ -\frac{a^2}{4} + 1 & (-4 \leq a \leq -2) \\ 2a+5 & (a \leq -4) \end{cases}$$

したがって、 $y = m(a)$ のグラフは次図の太線部分である。



以上から、求める a の値の範囲、すなわち、 $m(a) > 0$ となる a の値の範囲は

$$-2 < a$$