

【11】絶対値付き2次関数の最大・最小

次の問いに答えよ。ただし a は実数とする。

- (1) $f(x) = x^2 - x + a$ の $0 \leq x \leq 2$ の範囲での最大値と最小値を求めよ。
- (2) $g(x) = |x^2 - x + a|$ の $0 \leq x \leq 2$ の範囲での最大値 $M(a)$ を a の式で表せ。
- (3) $M(a)$ の最小値を求めよ。

/ '10 東京女子大 (現代教養) 1

解答

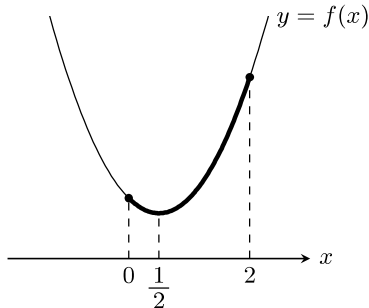
- (1) $f(x) = x^2 - x + a$ は

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$$

とできるので

$$\text{最大値: } f(2) = a + 2$$

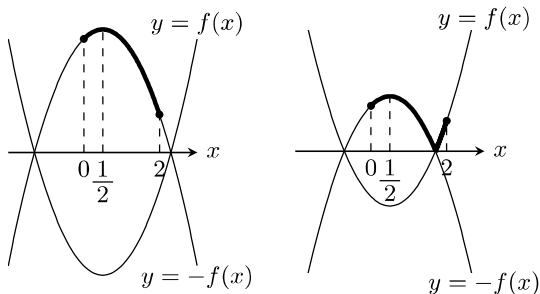
$$\text{最小値: } f\left(\frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{4}$$



- (2) 次のように場合を分ける。

- イ) $f(2) \leq 0$ または $0 \leq f(2) \leq -f\left(\frac{1}{2}\right)$ の場合
つまり $f(2) \leq -f\left(\frac{1}{2}\right)$ の場合

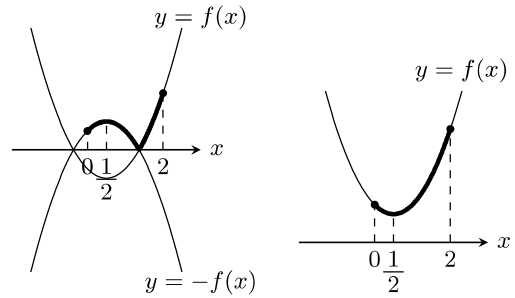
$$a + 2 \leq -a + \frac{1}{4} \quad \therefore a \leq -\frac{7}{8}$$



このとき、グラフより

$$M(a) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -a + \frac{1}{4}$$

- ロ) $-f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(2)$ すなわち $-\frac{7}{8} \leq a$ の場合



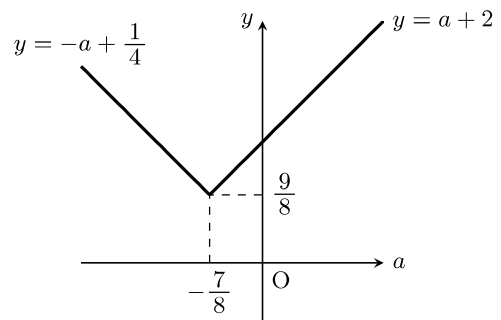
このとき、グラフより

$$M(a) = f(2) = a + 2$$

- イ), ロ) から

$$M(a) = \begin{cases} -a + \frac{1}{4} & \left(a \leq -\frac{7}{8} \text{ の場合}\right) \\ a + 2 & \left(-\frac{7}{8} \leq a \text{ の場合}\right) \end{cases}$$

- (3) (2) より、 $y = M(a)$ のグラフは次のようになる。



したがって、 $M(a)$ の最小値は

$$M\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{9}{8}$$