【9】軸の位置で場合分け

a, b は定数で $a > 0$ とする。関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + 2a + b$ について，次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を a と b を用いて表せ。
(2) $0 \leqq x \leqq 1$ における関数 $f(x)$ の最小値が 0 であるとき，a を用いて b を表せ。
(3) $0 \leqq x \leqq 1$ における関数 $f(x)$ の最小値が 0，最大値が 3 であるとき，a と b の値を求めよ。

/'14 名城大（理工）A・F 方式 2

解 答

(1) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + 2a + b$ は

$$f(x) = (x-a)^2 + 2a + b$$

とできるので，頂点の座標は

$$\boldsymbol{(a,\ 2a+b)}$$

(2) 軸 $x = a$ の位置で場合を分ける。

イ）$0 < a \leqq 1$ の場合
最小値は $f(a) = 2a + b$ だから

$$2a + b = 0 \qquad \therefore\ b = -2a$$

ロ）$1 \leqq a$ の場合
最小値は $f(1) = a^2 + b + 1$ だから

$$a^2 + b + 1 = 0 \qquad \therefore\ b = -a^2 - 1$$

以上，まとめて

$$\boldsymbol{b = \begin{cases} -2a & (0 < a \leqq 1) \\ -a^2 - 1 & (1 \leqq a) \end{cases}}$$

(3) 軸 $x = a$ の位置で場合を分ける。

ハ）$0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ の場合
最大値は $f(1) = a^2 + b + 1$ であり，(2) の イ）も考慮して

$$\begin{cases} b = -2a \\ a^2 + b + 1 = 3 \end{cases}$$

これらから b を消去して

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 1 = 3 &\iff (a-1)^2 = 3 \\ &\iff a - 1 = \pm\sqrt{3} \\ &\iff a = 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

これは $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ に不適。

ニ）$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ の場合
最大値は $f(0) = a^2 + 2a + b$ であり，(2) の イ）も考慮して

$$\begin{cases} b = -2a \\ a^2 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

これらから b を消去して

$$a^2 = 3 \qquad \therefore\ a = \pm\sqrt{3}$$

これは $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ に不適。

ホ）$1 \leqq a$ の場合
最大値は $f(0) = a^2 + 2a + b$ であり，(2) の ロ）も考慮して

$$\begin{cases} b = -a^2 - 1 \\ a^2 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

これらから b を消去して

$$2a - 1 = 3 \qquad \therefore\ a = 2$$

これは $1 \leqq a$ に適していて，このとき

$$b = -a^2 - 1 = -2^2 - 1 = -5$$

以上から，求める a, b の値は

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (2,\ -5)}$$