集中連載

“ドキッ”とする生徒からの質問集 Part 4

九州数学シンクタンクグループ

はじめに

“ドキッ” とする生徒からの質問集も，いよいよこの稿で終了となります。

九州数学シンクタンクからの発信は，「数学を横に切る」シリーズから始まり，全部で 8 回の連載となりました。これまでご愛読いただいた読者の皆さんや編集部の皆さんに心より感謝申し上げます。

私たちの研究が，全国の数学の若手教員にいくらかでも役立てば幸いに思います。九州数学シンクタンクの活動はしばらく休止しますが，個々に研究を進めていきたいと考えています。

さて，この度，最終回を迎えますが，今回，取り扱う問題は以下のとおりです。

今回取り扱う問題

Q20　x の整式を $(x-\alpha)$ で展開するとき，それぞれの係数はどのように定めるの？

Q21　円外の点からの接線の式は，接線の傾きを m とおいて解けるの？

Q22　中線定理の逆は成り立つの？

Q23　球面の表面積は、どのようにして求めるの？

Q24　点からの曲線への接線の本数は，曲線自身や曲線の変曲点における接線が，なぜ境界になるの？

Q25　なぜ数学を学ばなければならないの？

それでは，〈Q20〉から紹介します。

〈Q20〉 $2x^3+4x^2-5x+2$
$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ が恒等式のとき，係数 $a,\ b,\ c,\ d$ はどのようにすれば簡単に求めることができますか。

〈コメント〉

いくつかの解法を紹介し，生徒達に考えさせてはいかがでしょう。

〈回答 1〉

$$2x^3+4x^2-5x+2$$
$$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$の右辺を整理して

$$\text{右辺}=ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)$$

$(*)$が恒等式より，係数を比較して

$$a=2 \quad \cdots\cdots①$$
$$-3a+b=4 \quad \cdots\cdots②$$
$$3a-2b+c=-5 \quad \cdots\cdots③$$
$$-a+b-c+d=2 \quad \cdots\cdots④$$

①～④より　$a=2,\ b=10,\ c=9,\ d=3$

このように係数 $a,\ b,\ c,\ d$ が決まります。

〈回答 2〉

$x-1=t$ とおくと　$x=t+1$

これを$(*)$に代入して

$$2(t+1)^3+4(t+1)^2-5(t+1)+2=at^3+bt^2+ct+d$$

整理して

$$2t^3+10t^2+9t+3=at^3+bt^2+ct+d$$

t についても恒等式より

$$a=2,\ b=10,\ c=9,\ d=3$$

〈回答 3〉

$(*)$の両辺を x について定数になるまで微分していくと，以下のようになります。

$$6x^2+8x-5=3a(x-1)^2+2b(x-1)+c \quad \cdots\cdots(**)$$
$$12x+8=6a(x-1)+2b \quad \cdots\cdots(***)$$
$$12=6a \quad \cdots\cdots(****)$$

$(****)$より　$a=2$

$(*)$～$(***)$に $x=1$ を代入して

$$b=10,\ c=9,\ d=3$$

〈回答 4〉

$$\text{右辺}=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

右辺を $(x-1)$ で割ると

商 $Q_1(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$　余り $r_1=d$

さらに，商 $Q_1(x)$ を $(x-1)$ で割ると

商 $Q_2(x)=a(x-1)+b$　余り $r_2=c$

さらに，商 $Q_2(x)$ を $(x-1)$ で割ると

商 $Q_3(x)=a$　余り $r_3=b$

以上のことから，$(x-1)$ による除法を組立て除法をくり返して係数 $a,\ b,\ c,\ d$ を求めることができます。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 4 & -5 & 2 \\
+) & & 2 & 6 & 1 \\
\hline
 & 2 & 6 & 1 & \boxed{3} = r_1 \\
+) & & 2 & 8 & \\
\hline
 & 2 & 8 & \boxed{9} = r_2 & \\
+) & & 2 & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{10} = r_3 & & \\
 & \parallel & & & \\
 & Q_3(x) & & &
\end{array}
$$

したがって

$Q_3(x) = a = 2,\ r_3 = b = 10,\ r_2 = c = 9,\ r_1 = d = 3$

〈発展〉

ここで，以上の式変形から $x = 1$ における接線の式が導けないか考えてみましょう。

〈Q20〉より

$y = f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ ……①

$= 2(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 9(x-1) + 3$ ……②

②の 1 次式 $9(x-1)+3$ について考察すると

$f(1) = 3 \qquad f'(1) = 9$ より

$y = 9(x-1) + 3 = f'(1)(x-1) + f(1)$

となり，つまり $y = 9(x-1)+3$ は，$y = f(x)$ の $x = 1$ における接線の式を表すことになります。

したがって，2 次以上の整関数の任意の点での接線は，組立て除法を 2 回くり返すことで得られます。

例えば，$y = f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ の $x = 2$ における接線は，以下のように求めることができます。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
+) & & 2 & 4 & 14 & 28 \\
\hline
 & 1 & 2 & 7 & 14 & \boxed{30} \\
+) & & 2 & 8 & 30 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 15 & \boxed{44} &
\end{array}
$$

したがって，求める接線の式は

$y = 44(x-2) + 30 = 44x - 58$ になります。

〈Q21〉 点 $(1,\ 2)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の式を，$y = m(x-1)+2$ として求めたら，$m = \dfrac{3}{4}$ となり，接線が 1 本だけとなります。もう 1 本はどうすれば得られますか。

〈コメント〉

多くの生徒達が迷うところです。ゆっくり指導することが必要でしょう。

〈回答〉

$$
\begin{cases}
x^2 + y^2 = 1 & \cdots\cdots ① \\
y = m(x-1) + 2 & \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

①，②より

$(m^2+1)x^2 + 2m(2-m)x + (m^2 - 4m + 3) = 0$

接するとき，判別式 $D = 0$ より

$\dfrac{D}{4} = m^2(2-m)^2 - (m^2+1)(m^2-4m+3)$

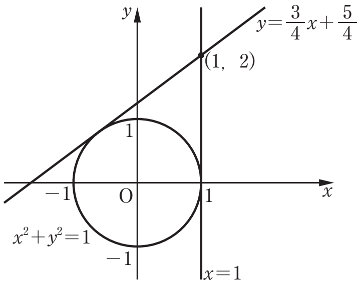
$= 4m - 3 = 0$

$m = \dfrac{3}{4}$

$m = \dfrac{3}{4}$ のとき，接線は　$y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$

確かに，接線は 1 本しか得られません。

作図で確かめてみると，下図のようになり，もう 1 つの接線は $x = 1$ であることがわかります。



つまり，直線 $x = 1$ は，$y = m(x-1)+2$ で表現できないので，注意しなければなりません。

したがって，点 $(1,\ 2)$ を通る直線は，$x = 1$ または $y = m(x-1)+2$ と，2 種類に分けて考えるべきなのです。

〈発展〉

ここで，$y = m(x-1)+2$ は，なぜ $x - 1 = 0$ を表現できていないか，直線の束の考え方を使って考えてみましょう。

ご承知のように，例えば 2 直線 $x + y - 1 = 0$ ……① と $x - y + 3 = 0$ ……② の交点を通る直線は

$a(x+y-1) + b(x-y+3) = 0$ ……(＊)

ただし，a，b は同時に 0 にならない定数です。

(＊)より

$(a+b)x + (a-b)y + (-a+3b) = 0$ ……(＊＊)

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) \neq 0$

よって，$a + b \neq 0$ または $a - b \neq 0$ より，(＊＊)は x，y について 1 次式であり，直線①と②の交点は(＊)に代入しても満たされています。

したがって，(＊)は直線①，②の交点を通る直線になります。

ここで，仮に $a \neq 0$ であれば

$$(x+y-1) + \frac{b}{a}(x-y+3) = 0$$

$a = 0$ であれば，$b \neq 0$ より

$x - y + 3 = 0$ となります。

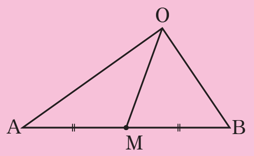
したがって，２直線①と②の交点を通る直線は次のように表現できます。

$$(x+y-1)+k(x-y+3)=0 \text{ または } x-y+3=0$$

$b\fallingdotseq 0$ としても同様に言えます。

ここで〈Q21〉を振り返ると，$y=m(x-1)+2$ は，$(y-2)+(-m)(x-1)=0$ と変形され，これは，直線 $y-2=0$ と $x-1=0$ の交点 $(1,\ 2)$ を通る直線を表しますが，$(-m)$ が係る直線 $x-1=0$ は除かれることになります。

〈Q22〉 △OABにおいて，点 M が辺 AB の中点ならば，$OA^2+OB^2=2(OM^2+AM^2)$ が成り立ちますが，逆は言えるのでしょうか。



〈コメント〉

ベクトルを使って考えてみましょう。

〈回答〉

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OM}=\vec{m}$ とします。

$$\begin{aligned}
&2(OM^2+AM^2)-(OA^2+OB^2)\\
&=2(|\vec{m}|^2+|\vec{m}-\vec{a}|^2)-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)\\
&=4|\vec{m}|^2-4\vec{m}\cdot\vec{a}+2|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\\
&=4|\vec{m}|^2-4\vec{m}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\\
&=|2\vec{m}-\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 \qquad \cdots\cdots(*)\\
&=(2\vec{m}-\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{m}-\vec{a}+\vec{b})
\end{aligned}$$

点 M が辺 AB の中点ならば

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \text{ より } 2\vec{m}-\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$$

よって　$2(OM^2+AM^2)-(OA^2+OB^2)=0$

確かに〈中線定理〉$2(OM^2+AM^2)=OA^2+OB^2$ が成り立ちます。

ここで，中線定理の逆は成り立つのでしょうか。

△OAB において

$OA^2+OB^2=2(OM^2+AM^2)$ ならば，点 M は辺 AB の中点である。

これが正しいかどうか，調べてみましょう。

$$2(OM^2+AM^2)-(OA^2+OB^2)=0$$

$(*)$より　$|2\vec{m}-\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$

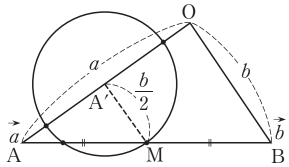
$$|2\vec{m}-\vec{a}|=|\vec{b}|$$

$$\left|\vec{m}-\frac{\vec{a}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{b}}{2}\right|$$

これは，辺 OA の中点 A′，$|\vec{b}|=b$ とすれば

$|\overrightarrow{A'M}|=\dfrac{b}{2}$ となり

点 M が点 A′ を中心とし，半径 $\dfrac{b}{2}$ の円周上にあり，点 M は無数に存在します。



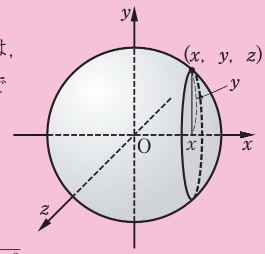
また，円周と △OAB は，上図により，点 M は辺 AB の中点以外にも △OAB と共有点があり，辺 AB の中点以外にもあることがわかります。

したがって，逆は成り立ちません。

〈Q23〉 中心が原点で半径 r の球面の表面積を以下のように求めます。

x における円周は，$2\pi y$ と表せるので

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^r 2\pi y\,dx\\
&=4\pi\int_0^r y\,dx\\
&=4\pi\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx\\
&=4\pi\cdot\frac{\pi r^2}{4}\\
&=\pi^2r^2
\end{aligned}$$



となります。しかし，実際は $S=4\pi r^2$ ですから誤りです。何がいけないのでしょうか。

〈コメント〉

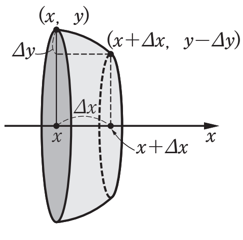
線分の長さを集めると面積になるという考え方が誤りであり，微小面積 $\varDelta S$ の集積が面積になることを改めて教えるべきところです。

また，微小面積がどのような式に近似できるのかが問題解決の重要なカギを握ります。

〈回答〉

x の増分を $\varDelta x$，y の増分を $-\varDelta y$ とし，このときの表面積の増分を $\varDelta S$ とする。

このときの弧長を $\varDelta l$ とする。



$\varDelta x$ が微小のときは

$$\varDelta S \fallingdotseq 2\pi y\cdot\varDelta l$$

$$\varDelta l \fallingdotseq \sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}$$

よって　$\varDelta S \fallingdotseq 2\pi y\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}$ として近似できます。

$$\frac{\varDelta S}{\varDelta x} \fallingdotseq 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}$$

つまり $\Delta x \to 0$ のとき

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$S = \int_{-r}^{r} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_{0}^{r} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$x^2+y^2=r^2$ より $2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

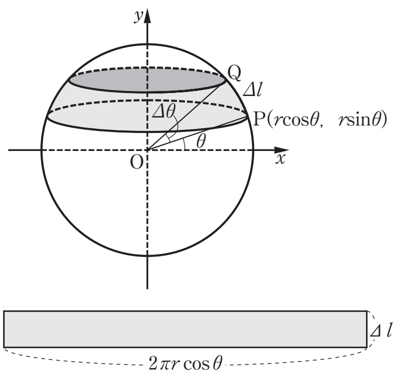
$$S = 4\pi\int_{0}^{r} y\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_{0}^{r}\sqrt{y^2+x^2}\,dx = 4\pi\int_{0}^{r} r\,dx$$

$$= 4\pi[rx]_0^r = 4\pi r^2$$

〈発展〉

球面の表面積を，$\Delta\theta$ を用いて求めてみましょう。



$\overset{\frown}{PQ} = \Delta l$ とすると微小面積 ΔS は

$$\Delta S \fallingdotseq 2\pi r\cos\theta\cdot\Delta l = 2\pi r\cos\theta\cdot r\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta\theta} \fallingdotseq 2\pi r^2\cos\theta$$

$\Delta\theta \to 0$ のとき

$$\frac{dS}{d\theta} = 2\pi r^2\cos\theta$$

$$S = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\pi r^2\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi r^2$$

〈Q24〉 点 $P(a,\ b)$ から曲線 $C:y=x^3-3x$ に引いた接線の本数は，曲線 C と曲線 C の変曲点 $O(0,\ 0)$ における接線が境界になりますが，一般的に言えるのですか。

〈コメント〉

入試問題でよく見かける問題です。発展として一般性まで踏み込んで考えてみました。

〈回答〉

点 $P(a,\ b)$ から曲線 $y=f(x)=x^3-3x$ に引いた接線の接点の1つを $Q(t,\ f(t))$ とおく。

接線の式は

$$y = f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$= (3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$
$$= (3t^2-3)x-2t^3 \quad \cdots\cdots(*)$$

接線$(*)$は点 $P(a,\ b)$ を通るので

$$b = (3t^2-3)a-2t^3$$
$$2t^3-3at^2+3a+b=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

t についての方程式$(**)$は，接点を求める方程式である。

$(**)$において，$g(t)=2t^3-3at^2+3a+b$ とおくと

$$g'(t) = 6t^2-6at$$
$$= 6t(t-a)$$

$g'(t)=0$ となる t は，$t=a$ と $t=0$ である。

(i) $a \neq 0$ とき $g(t)$ は $t=a$ と $t=0$ で極値をもつ。

極値① $g(a) = 2a^3-3a^3+3a+b$
$= b-a^3+3a$ ……①

極値② $g(0) = b+3a$ ……②

極値①と②の符号によって，$g(t)=0$ の解の個数が変化するので，$g(a)=0$ と $g(0)=0$ は方程式$(**)$の解の個数，つまり接線の本数を分ける境界である。

(ii) $a=0$ のとき

$(**)$は　$2t^3+b=0$

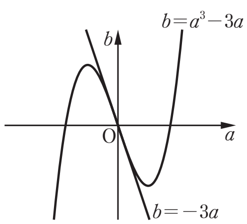
$t=-\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}}$ となり，t は1個確定する。

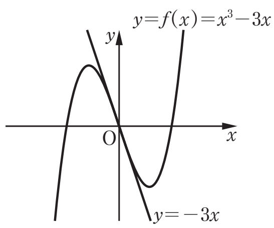
$g(a)=0$ より　$b=a^3-3a$　$(a \neq 0)$ ……①

$g(0)=0$ より　$b=-3a$　$(a \neq 0)$ ……②

上のことから，特に変曲点では，曲線および接線上で，接線の本数が重なって，本数の境界となります。

①，②を ab 平面で表すと，左下図のようになる。





これを xy 平面で表すと，右上図のようになる。

ここで，$f''(x)=6x$ より，変曲点は $x=0$ のときであり，$y=-3x$ が変曲点における接線である。

したがって，$y=f(x)=x^3-3x$ と変曲点における接線 $y=-3x$ が，接線の本数を分ける境界線である。

ちなみに

(i) $a \neq 0$ のとき

$g(a)$ と $g(0)$ が同符号のとき，

方程式(＊＊)の解 1 個で接線は 1 本

$g(a)$ と $g(0)$ が異符号のとき，

方程式(＊＊)の解 3 個で接線は 3 本

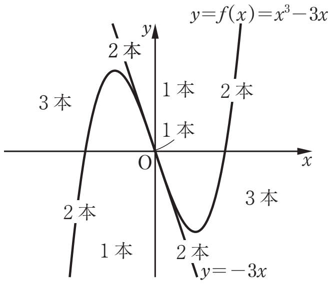
$g(a)=0$ または $g(0)=0$ のとき，

方程式(＊＊)の解 2 個で接線は 2 本

(ii) $a=0$ のとき

方程式(＊＊)の解 1 個で接線は 1 本

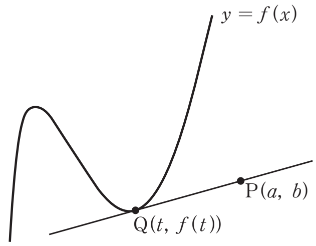
以上のことから，接線の本数を領域別に分けると，次の図のようになります。



変曲点では，上図のように接線の本数の変化が見られます。

〈発展〉

一般的に，点 P$(a,\ b)$ から変曲点をもつ曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の本数は，曲線 $y=f(x)$ とその変曲点における接線が境界になります。なぜそうなるのか，〈Q23〉と同様に考えてみましょう。



点 P$(a,\ b)$ から曲線 $y=f(x)$ に引いた接点の 1 つを Q$(t,\ f(t))$ とおく。

点 Q$(t,\ f(t))$ における接線の式

$$y=f'(t)(x-t)+f(t) \quad \cdots\cdots(＊)$$

接線(＊)は円 P$(a,\ b)$ を通るので

$$b=f'(t)(a-t)+f(t)$$

$$=af'(t)-tf'(t)+f(t)$$

$$f(t)-tf'(t)+af'(t)-b=0 \quad \cdots\cdots(＊＊)$$

t についての方程式(＊＊)は，接点を求める方程式である。

ここで，$g(t)=f(t)-tf'(t)+af'(t)-b$ とおくと

$$g'(t)=f'(t)-f'(t)-tf''(t)+af''(t)$$

$$=(a-t)f''(t)$$

$g'(t)=0$ は，$t=a$ または $t=\alpha$ のときである。(ただし，$f''(\alpha)=0$ とする)

(i) $a \neq \alpha$ のとき

ここで，$y=f(x)$ が $x=\alpha$ で変曲点をもつとすれば，

$f''(t)$ は，$f''(\alpha)=0$ であり，かつ $x=\alpha$ の前後で符号が変化する。

したがって，$g(t)$ は $t=a$，$t=\alpha$ で極値をもつ。

極値① …… $g(a)=f(a)-af'(a)+af'(a)-b$

$=f(a)-b$

極値② …… $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)+af'(\alpha)-b$

極値①と②の符号によって，$g(t)=0$ の解の個数が変化するので $g(a)=0$ と $g(\alpha)=0$ は，方程式(＊＊)の解の個数，つまり，接線の本数を分ける境界である。

$g(a)=0$ より　$b=f(a)$ ……①

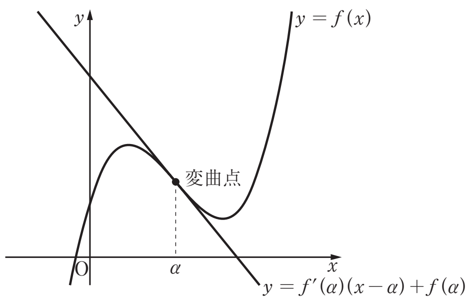
$g(\alpha)=0$ より　$b=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)+af'(\alpha)$

$=f'(\alpha)(a-\alpha)+f(\alpha)$ ……②

(ii) $a=\alpha$ のとき

変曲点の点 P$(\alpha,\ f(\alpha))$ が(i)の境界線①，②上にある。

よって，①，②式は，前回答のように ab 平面を xy 平面で表すと，下図のようになります。



したがって，$y=f(x)$ と変曲点における

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ は接線の本数を分ける境界線になります。

〈Q25〉 今，学んでいる数学がなぜ必要なのか，なぜ数学を学ばなければならないのでしょうか。

〈回答〉

●人がこの世に生を受け，与えられた時間を悔いのないよう，よりよく生きようと考えるときやその時間を人のために使おうとするときには必ずと言っていいほど，自分の頭で状況を分析し判断する場面に遭遇する。
「数学を学ぶこと」は「人生をシミュレーションする」ことだ。
人生はずっと先まで行かないと正解だったのか，不正解だったのか解らない。数学は答えが出るからまだましだ。場合分けも数え上げも人生に比べればかわいいものだ。だから，答えが出ることから逃げてばかりいては，よりよい生き方はできない。教えあい，学びあいの中で他者の意見に耳を貸さないのは独りよがりの判断力しか育たない。別解に感動する心を育てないと巡り合う人に感動を与えられない。
たかが数学というけれど，それを学ぶ意義は深い。（S）

●生きることは決断の連続である。決断を下すためには，世界の事実を客観的に把握する力を身につけることが必要であり，学問の存在価値は，私たちに，私たちが生きる世界を明瞭に認識する力を与えてくれることにある。
数学も，この獲得すべき全体的・普遍的な世界表象の一部分として存在している。数量や形式が雑多なままに散在している世界に「意味」や「秩序」を与え，世界が全体としてどのように存在しているのかを理解したい，という欲求は，程度の差はあれ人類の普遍的なものであろう。問題が解けると楽しい，という生徒は多いが，数学の真の楽しみは“世界が整序される快感”ではないだろうか。
数学を学ぶ必要はいろいろと語れるが，「世界の成り立ち」を知りたいと思うのなら，数学こそ最適の学問である。（K）

●小中義務教育のうえに，高大の中等高等教育があるように，基本問題の組み合わせ・積み重ねのうえに，応用問題がある。逆に言えば，答えがなかなか見つからない問題も基礎基本の組み合わせであり，その解法の積み重ねで解を見出せるのである。
政治，経済，組織経営や管理運営に限らず，社会に出ると，日々直面する課題は，即答できない問題，答えが明確でない問題が常である。社会に出て，やってはいけないことは，直面する課題や問題に対する判断ミスである。諸条件を整理し，論理的に思考を重ね，正解を導く力の養成こそ学生の内にやっておくべき事である。このことこそ，生涯学習の基礎であり，数学学習の真意である。
加えてひと言，「若者よ，数学を勉強しよう！」社会に有為な人材になるために…。（SH）

●数学を苦手としている人は，世の中に沢山いるでしょう。むしろ，得意という人は少ないのではないでしょうか。しかしながら世の中には，スポーツが得意な人，歌が得意な人，釣りが得意な人，麻雀が得意な人，…実に様々な人がいるのです。
数学が得意な人もそうした一人だと言って良いでしょう。だから，数学が苦手でも別にかまわないのです。大丈夫です。数学に代わる，他に何か好きなものがあれば良いのです。
しかし，私はここで一言，言いたいのです。実は，我々は，日常の生活の中で，常に数学的な思考をしているのです。例えば，場所と時間を決めて人に会うとき，途中の交通の時間を逆算して家を何時に出ればよいかと，自然に決めています。このように，我々が物事を決めるとき，何が分かっており，何が分かっていないのかを整理しながら，その途中の過程を筋道を立てて思考しているのです。分かっているもの（仮定）から，求めようとするもの（結論）までを導くこと，これがまさしく数学なのです。
数学が嫌いだと言うあなた。実はあなたの頭の中では，毎日，数学が息づいているのです。（N）

さいごに

　拙い研究でしたが，最後までご愛読いただき本当にありがとうございました。何処にでもいる普通の数学を愛する高校の教員が独自に研究を進めたものですから，不十分な面が多々あったことだと思います。この場を借りてお詫びを申し上げます。
　次の研究がまとまりましたら，発表したいと考えています。
　数学の若手教員のみなさん，またその折に，本誌でお会いしましょう。