

【8】対称式と領域

実数 s, t が $s^2 + t^2 \leq 6$ を満たしながら変わるとき, xy 平面上で点 $(s+t, st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。
- (2) A を図示せよ。

/ '19 大阪大 (理系) 前期 3 《略題》

解答

- (1) $s+t=2, st=\sqrt{2}$ とするとき, s と t を解とする x の 2 次方程式は

$$x^2 - 2x + \sqrt{2} = 0$$

となる。この方程式の判別式の値は

$$(\text{判別式}) = (-1)^2 - 1 \cdot \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$$

であるから, s と t は実数でない。

よって, 点 $(2, \sqrt{2})$ は 領域 A の点ではない。

- (2) 領域 A の点を (X, Y) とおくと

$$X = s+t, \quad Y = st$$

である。

s と t を解とする x の 2 次方程式は

$$x^2 - Xx + Y = 0$$

となる。この方程式の解がすべて実数となる為の条件は, (判別式) ≥ 0 だから

$$X^2 - 4Y \geq 0 \quad \therefore Y \leq \frac{1}{4}X^2 \quad \dots\dots ①$$

また, 条件 $s^2 + t^2 \leq 6$ から

$$(s+t)^2 - 2st \leq 6 \quad \therefore Y \geq \frac{1}{2}X^2 - 3 \quad \dots\dots ②$$

以上から, X, Y が満たすべき条件は ① かつ ② なので, 領域 A は次図の灰色部分である。境界はすべて含む。

