

【7】直方体の体積の最大値

次の問いに答えなさい。

- (1) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解が α, β, γ であるとき、3 つの係数 a, b, c を α, β, γ で表しなさい。
- (2) 次の 2 条件
 - (i) 縦, 横, 高さを加えると 9 m になる。
 - (ii) 表面積は 48 m^2 である。
 を満たす直方体の体積のうちで最大のものを求めなさい。

/ '07 埼玉大 (教育・経済) 前期 4

解答

- (1) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解が α, β, γ であるとき

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

とできるので、係数を比べて

$$\begin{cases} a = -(\alpha + \beta + \gamma) \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

- (2) 直方体の縦の長さ, 横の長さ, 高さをそれぞれ α, β, γ とおくと, 条件 (i), (ii) から

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 9 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 24 \end{cases}$$

が成り立つ。また, この直方体の体積を V とすれば

$$V = \alpha\beta\gamma$$

である。

α, β, γ を解とする x についての 3 次方程式は

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) &= 0 \\ \iff x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 &+ (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \\ \iff x^3 - 9x^2 + 24x - V &= 0 \\ \iff x^3 - 9x^2 + 24x &= V \end{aligned}$$

となり, この 3 次方程式の解がすべて正の値をとるように V が動く。

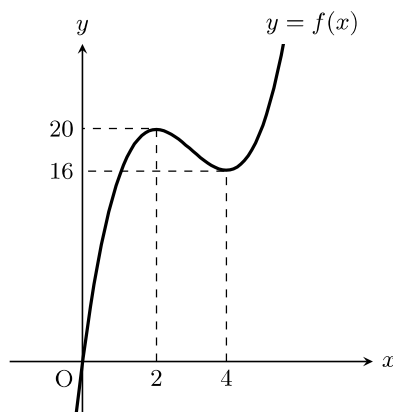
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ &= 3(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

であるから, $f(x)$ の増減は次表の通り。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

したがって, $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



ゆえに, 3 次方程式 $f(x) = V$ の解がすべて正の値をとるような V の値の範囲は

$$16 \leq V \leq 20$$

であり, 求める V の最大値は **20** である。