

【6】等式・不等式の証明

a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a + b = c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ。
 (2) $a + b \geq c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ。

/ '09 東北大 (理系) 前期 1

解答

- (1) $a + b = c$ のとき

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - c^3 + 3abc &= (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \\ &= 0 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$a^3 + b^3 + 3abc = c^3$$

が成り立つ。 ■

- (2) (1) と同様に

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - c^3 + 3abc &= (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \end{aligned}$$

と因数分解できる。

ここで, $a + b \geq c$ のとき

$$a + b - c \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

である。

また

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2bc + 2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} \end{aligned}$$

とで, a, b, c は実数だから

$$\frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} \geq 0$$

すなわち

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca \geq 0 \quad \dots\dots ②$$

である。

① ② から

$$(a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \geq 0$$

すなわち

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc \geq 0$$

が成り立つので

$$a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$$

が成り立つ。 ■