

【5】対称式の計算

a, b, c を実数とする。 $x = a + b + c, y = bc + ca + ab, z = abc$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a^2 + b^2 + c^2$ を x, y を用いて表せ。
- (2) $a^3 + b^3 + c^3$ を x, y, z を用いて表せ。
- (3) 次の等式を満たす実数 p, q, r は存在しないことを示せ。

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} = 1$$

/ '24 静岡大 (理) 前期 2 《改題》

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 &= (a + b + c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2y \end{aligned}$$

であるから

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y$$

(2) 一般的に、等式

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= x\{(x^2 - 2y) - y\} + 3z \\ &= x^3 - 3xy + 3z \end{aligned}$$

(3) 背理法で示す。等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} = 1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

を満たす実数 p, q, r の存在を仮定する。

$$a = \frac{1}{p}, \quad b = \frac{1}{q}, \quad c = \frac{1}{r} \quad \text{とおくと}$$

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$$

であり、(1) (2) の結果から

$$x = x^2 - 2y = x^3 - 3xy + 3z = 1 \quad \dots\dots ②$$

と書き換えられる。さらに

$$\begin{aligned} ② &\iff \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2y = 1 \\ x^3 - 3xy + 3z = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

とできるが

$$z = abc = \frac{1}{pqr} \neq 0$$

であることに矛盾する。

よって、① を満たす実数 p, q, r は存在しない。 ■