集中連載

“ドキッ”とする生徒からの質問集 Part2

九州数学シンクタンクグループ

今回取り扱う問題

前回に引き続き，“ドキッ”とする生徒からの質問を，九州シンクタンクグループから全国の数学の若手の先生方に発信します。日頃，授業で何気なく教えている中で，生徒は「どうしてなの？」「こんな場合はどうなるの？」と疑問にもつことがあります。

以下の生徒からの質問に，あなたならどのように答えるでしょうか。

Q9　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{6}$ は成り立つの？

Q10　0 は自然数と言えるの？

Q11　漸化式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ の特性方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ の意味は？

Q12　$1>0.\dot{9}$ と言えないの？

Q13　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$ と言えないの？

Q14　置換積分の積分区間は自由に決めてよいの？

Q15　方程式 $(x^2+y^2-4)+k(x^2+y^2-8x+15)=0$ の $k=-1$ はどんな直線になるの？

さて，それでは〈Q9〉から紹介します。

〈Q9〉　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{6}$ は成り立つのでしょうか。

〈コメント〉

このような生徒のミスをよく見かけますが，指導の際には $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ が常に成り立つわけではないことを示しておくことが必要でしょう。

〈回答〉 a，b の符号に分けた例で考えてみましょう。

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad\cdots\cdots(*)$$

$a=3$，$b=2$ のとき　$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

$a=3$，$b=-2$ のとき

$$\sqrt{3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i=\sqrt{-6}$$

$a=-3$，$b=2$ のとき

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{2}=\sqrt{6}\,i=\sqrt{-6}$$

$a=-3$，$b=-2$ のとき

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$$

以上より，$(*)$が成り立つのは，$a<0$，$b<0$ 以外のときなのです。教科書では $a>0$，$b>0$ のとき$(*)$が成り立つとしています。定理や公式を用いるときはその条件の確認をさせる指導が大切です。

〈Q10〉　大学の入試問題で「1 以上の整数」と書いてあるものをよく見かけますが，何故「自然数」と書かないのでしょうか。

〈コメント〉

自然数の定義については，1 以上の整数とするのが一般的ですが，そうではないこともあります。

〈回答〉

自然数の定義には 2 通りあり，「1，2，3…」を自然数と定義する流儀と，「0，1，2，3…」を自然数とする流儀があります。この混乱を避けるために，大学入試等では「1 以上の整数」，「正の整数」などと表記しています。

自然数を集合論的に定義するときは，空集合に対応する零を自然数に含める方が便利なので，自然数＝非負整数という扱いをすることもあるのです。

コンピュータサイエンス，集合論，論理学などでは，自然数に 0 を含めるのが普通です。

ただし，高校の教科書では，自然数を正の整数「1，2，3…」として扱っています。

〈Q11〉　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ の特性方程式 $\left(\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1\right)$ を作るとき，一般的には a_{n+1} と a_n は異なるのに何故両方を α とおくのでしょうか。

〈コメント〉

多くの生徒達が不思議に思っているようです。しっかり説明しておくべきでしょう。

〈回答〉

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad\cdots\cdots①$$

①を　$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)\quad\cdots\cdots②$　に変形したい。

②より　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}\alpha+\alpha$　……③

①と③より

$$1=-\frac{1}{2}\alpha+\alpha$$

これは　$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$　……④　と変形され，特性方程式④は，①の a_{n+1}, a_n に α を代入した形になっています。一般に，漸化式 $a_{n+1}+pa_n+q$ のタイプの特性方程式を作るときは，上に示したように，a_{n+1} と a_n に α を代入すればよいのです。

ところで，②の式の a_{n+1} と a_n に α を代入すれば，$0=0$ となり，等式が成り立ちます。

①と②は同値ですから，当然①の式の a_{n+1} と a_n に α を代入してもよいことになっているのです。

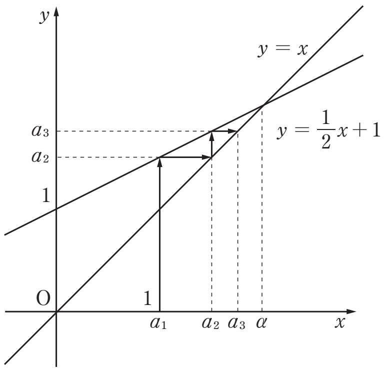
〈発展〉

さて，この特性方程式の解 α は図形的にどのような意味をもつのでしょうか。

仮に，数列 $\{a_n\}$ が極限値 α に収束するなら

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to\alpha$，$a_{n+1}\to\alpha$ です。①において，$n\to\infty$ の極限を考えたのが $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ という式です。つまり，この特性方程式の解 $\alpha=2$ は，数列 $\{a_n\}$ の極限値を意味することになります。

ここで 2 直線 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y=x \end{cases}$ をかき，$a_1=1$ を x 軸上に点 $(1,\ 0)$ をとり，ここをスタートとして，a_2，$a_3\cdots$ を順次 x 軸上にとっていくと，数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\alpha=2$ がこの 2 直線の交点としてイメージできます。



〈Q12〉 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ だから $1>0.\dot{9}$ と言えないのでしょうか。

〈コメント〉

多くの生徒が，感覚的に $1>0.\dot{9}$ と思っているようです。

〈回答〉

$$S_1=0.\dot{9}=0.999\cdots$$
$$=0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$$

これは初項 0.9 公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比級数です。

公比 $\frac{1}{10}$ だから，和は収束します。

$$S_1=0.\dot{9}=\frac{0.9}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0.9}{\frac{9}{10}}=1$$

したがって，$0.\dot{9}$ と 1 は等しいのです。

〈発展〉

ところで，無限等比級数の和が 1 になる場合は他にもないのでしょうか。

初項 a 公比 r $(-1<r<1)$ の無限等比級数の和は $\frac{a}{1-r}$ ですが，和が 1 となるのは $\frac{a}{1-r}=1$ すなわち $a=1-r$ のときです。

つまり，初項 $(1-r)$，公比 r $(-1<r<1)$ の無限等比級数の和は 1 になります。

例えば，初項 $\frac{7}{10}$，公比 $\frac{3}{10}$ の無限等比級数 S_2 は

$$S_2=\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)+\frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{10}}=1$$

初項 $\frac{2}{5}$，公比 $\frac{3}{5}$ の無限等比級数 S_3 は

$$S_3=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{5}}=1$$

S_1，S_2，S_3 のように，収束値はすべて 1 になり，また，「1」自身も

$S_0=1+1\cdot0+1\cdot0^2+1\cdot0^3+1\cdot0^4+\cdots$ と，表現されますから，1 に収束する無限等比級数は無数にあります。

こうした 1 に収束する無限等比級数を総称して「1」と考えてよいのです。

〈Q13〉 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$ ではないでしょうか。

〈コメント〉

生徒の中には，このようなミスをしているのをよく見かけます。e の定義はしっかりおさえたいものです。

〈回答〉

与式を $\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^m=1$ という考え方をしており，$1+\frac{1}{n}$ の分母の n と，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の指数の n は，同じ値をとりながら $n\to\infty$ の極限を考えなければなりません。

さて，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ について，n の値を限りなく大きくまたは小さくしてみます。

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2		
10	2.59374…	−10	2.86797…
100	2.70481…	−100	2.73199…
1000	2.71692…	−1000	2.71964…
10000	2.71814…	−10000	2.71841…
100000	2.71826…	−100000	2.71829…

このようにすると，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は一定の値に近づいていきます。

〈発展〉

さて，$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は，n を無限大に近づけるとき，本当に収束するのか調べてみましょう。

[数列 $\{a_n\}$ は単調増加であるかどうか]

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+{}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{4!}+\cdots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\quad\cdots\cdots(*)$$

a_{n+1}

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)}{4!}+\cdots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}$$
$$\cdots\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$の対応する各項を比較すると

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}<\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!}$$
$$(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

かつ，$(**)$の末項

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}>0$$

より　$a_n<a_{n+1}$

つまり，数列 $\{a_n\}$ は単調増加です。

[数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるかどうか]

$$a_n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{4!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$
$$<\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$\leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\quad(\because k!\geqq 2^{k-1})$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3$$

つまり，数列 $\{a_n\}$ は上に有界です。

したがって，数列 $\{a_n\}$ は単調増加で上に有界ですから，一定の値に収束することになります。

この値を e として，

$\lim_{n\to\infty}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ と定義しています。

ところで，e の定義については様々です。これまで述べてきたように，下の①を e の定義としましょう。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad\cdots\cdots①$$

以下の②，③，④は①から順に導けます。

$$\lim_{h\to+0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e\quad\cdots\cdots②$$

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad\cdots\cdots③$$

$$\lim_{h\to-0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e\quad\cdots\cdots④$$

②を証明します。

②において $h=\frac{1}{n}$ とすれば　$h\to+0$ のとき $n\to\infty$

②の左辺 $=\lim_{h\to+0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

つまり②が導けます。

③を証明します。

③において $n=-t$ とすれば

$n\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

③の左辺 $=\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$

$=e\cdot1=e$　つまり③が導けます。

④を証明します。

④において $h=\dfrac{1}{n}$ とすれば

$h\to-0$ のとき $n\to-\infty$

④の左辺 $=\displaystyle\lim_{h\to-0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$　つまり④が導けます。

また，逆もそれぞれ成り立ちますから，①，②，③，④は同値になります。つまり，e の定義は①，②，③，④のどれでもよいことになるのです。

〈Q14〉 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ で，$x=\sin\theta$ とおいて置換積分するとき

x と θ の対応を

[1]

x	$0\to\dfrac{1}{2}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{6}$

とするときと，

[2]

x	$0\to\dfrac{1}{2}$
θ	$0\to\dfrac{5}{6}\pi$

としたときで，

結果が同じになりました。

積分区間の対応は，適当にとってよいのでしょうか。

〈コメント〉

教科書ではあまりくわしく述べていませんが，生徒には説明しておきたいところです。

〈回答〉

[1]の場合

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\cos\theta|\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

[2]の場合

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}|\cos\theta|\cos\theta d\theta\quad\cdots\cdots(*)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}(-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

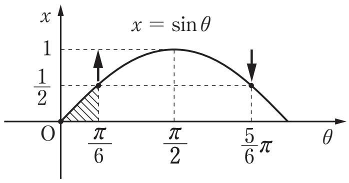
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

確かに[1]，[2]は同じ結果となります。

何故，結果が同じになるか，$x=\sin\theta$ のグラフを参考に考えてみましょう。



[2]の(＊)においては

$$\int_0^{\frac{5}{6}\pi}|\cos\theta|\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\cos\theta|\cos\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta|\cos\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}|\cos\theta|\cos\theta d\theta$$

第 2 項＋第 3 項：$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=0$$

したがって，このように，区間 $\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq1\right)$ で相殺されてしまうので，結果的に[1]，[2]は等しくなるのです。

〈発展〉

ところで

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の問題で，$x=\sin\theta$ とおくとき，

本来なら $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ で対応しますが，仮に[2]のよう

に

x	$0 \to \frac{1}{2}$
θ	$0 \to \frac{5}{6}\pi$

と対応すれば $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で，

(分母) $= 0$ となり，不連続な点を含むことになります。このような場合は，「広義の積分」で処理することになります。

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1} d\theta + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2}^{\frac{5}{6}\pi}(-1)\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}[-\theta]_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1\right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2-\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

答は導けますが，解き方を複雑にするだけです。したがって，置換積分の対応する積分区間は，不連続な点を作らないように，1：1 対応するように，また，できるだけ計算が楽になるようにとる方がよいでしょう。

〈Q15〉 離れている 2 円 $C_1：x^2+y^2-4=0$ と，$C_2：x^2+y^2-8x+15=0$ において，方程式 $(x^2+y^2-4)+k(x^2+y^2-8x+15)=0$ の $k=-1$ で得られる直線は図形上どのような意味をもつのでしょうか。

〈コメント〉

円 $C_1：x^2+y^2=4$ は，中心 $C_1(0,\ 0)$，半径 $r_1=2$ の円

円 $C_2：(x-4)^2+y^2=1$ は，中心 $C_2(4,\ 0)$，半径 $r_2=1$ の円になります。

明らかに 2 円 C_1, C_2 は離れており，共有点をもちません。しかしながら，$k=-1$ のとき，直線 $l：8x-19=0$ は存在しています。直線 l は図形上どのような意味をもつのか，考えてみましょう。

〈回答〉

$k=-1$ のとき

$$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2-8x+15)=0$$

したがって　$x^2+y^2-4=x^2+y^2-8x+15$

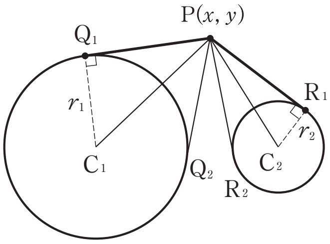
$$x^2+y^2-4=(x-4)^2+y^2-1 \quad \cdots\cdots(*)$$

ここで，2 円の中心は $C_1(0,\ 0)$，$C_2(4,\ 0)$

2 円の半径は $r_1=2$，$r_2=1$

平面上の点 $P(x,\ y)$ とすると

$(*)$は　$\overline{C_1P}^2-r_1^2=\overline{C_2P}^2-r_2^2 \quad \cdots\cdots(**)$



点 $P(x,\ y)$ から 2 円 C_1，C_2 に引いた接点の 1 つを Q_1，R_1 とすれば

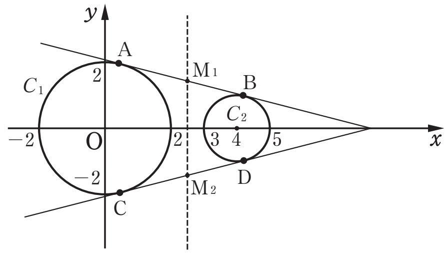
$\overline{C_1P}^2-r_1^2=\overline{PQ_1}^2$，$\overline{C_2P}^2-r_2^2=\overline{PR_1}^2$ となり

$(**)$は　$\overline{PQ_1}^2=\overline{PR_1}^2$

つまり　$\overline{PQ_1}=\overline{PR_1}$

よって $k=-1$ で得られる直線 $l：8x-19=0$ は 2 円に引いた接線の長さが等距離になる点 P の軌跡になります。

したがって，下の図のように共通外接線を 2 本引き，接点を A，B，C，D とすれば $k=-1$ で得られる直線 l は線分 AB の中点 M_1 と，線分 CD の中点 M_2 を結ぶ直線です。

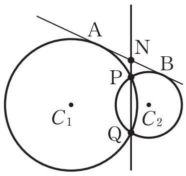


〈発展〉

上で示したように，

一般に，2 円 C_1，C_2 に対して $k=-1$ で得られる直線 l は，2 円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡になりますが，直線 l の位置がどのような位置にあるかは，2 円 C_1，C_2 の位置関係によって決まります。

特に，2 円 C_1，C_2 が下の図のように，2 点 P，Q で交わっているとします。このとき，直線 PQ と共通外接線 AB の交点を N とすれば，方べきの定理より



$$NP \cdot NQ = NA^2 \quad \cdots\cdots①$$

$$NP \cdot NQ = NB^2 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立ちます。

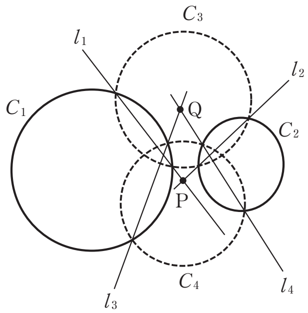
①，②より $NA=NB$ となり，点 N は線分 AB の中点であることが分かります。

つまり，直線 l は直線 PQ になります。

ところで，2 円の位置が包含関係とすれば，さらに難しくなります。ここで，一般的に直線 l の位置はどこにあ

るか，作図で考えてみましょう。

2 円 C_1，C_2 に交わる任意の円 C_3，C_4 を下の図のようにかき入れます。



2 円 C_1，C_2 において，$k=-1$ で得られる直線 l を $\mathrm{C_1}-\mathrm{C_2}=0$ と表現すると，

2 円 C_1，C_3 で，直線 l_1 は $\mathrm{C_1}-\mathrm{C_3}=0$ となり，

2 円 C_3，C_2 で，直線 l_2 は $\mathrm{C_3}-\mathrm{C_2}=0$ となります。

ここで，l_1+l_2：$(\mathrm{C_1}-\mathrm{C_3})+(\mathrm{C_3}-\mathrm{C_2})=0$

直線 l：$\mathrm{C_1}-\mathrm{C_2}=0$ が得られます。

つまり，直線 l は l_1 と l_2 の交点 P を通ることを意味します。

同様に

直線 l は l_3 と l_4 の交点 Q を通ります。

このようにして，直線 l は 2 点 P，Q を結ぶ直線ともいえます。

読者からの「ドキ問」

全国の先生から，次のような“ドキ問”の提供がありましたので，ご紹介します。

〈Q〉 軌跡の問題は逆のことも一言述べるべきでしょうか。省略することも多いので判断が分かりません。

〈回答〉

軌跡の逆は，一応成り立つのかどうか，考えてみることが大切です。

例えば 2 点 A(0, 0)，B(4, −2) から等距離にある点 P の軌跡の場合は，点 P$(x,\ y)$ として

$$\mathrm{PA}=\mathrm{PB} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2} \qquad \cdots\cdots②$$

2 乗して $x^2+y^2=(x-4)^2+(y+2)^2 \qquad \cdots\cdots③$

$$x^2+y^2=x^2-8x+16+y^2+4y+4 \qquad \cdots\cdots④$$

$$8x-4y-20=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$2x-y-5=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

点 P の軌跡は，直線 $2x-y-5=0$ になります。

ところで，②を 2 乗して③が得られるので，正しくは②と③は同値でありません。したがって⑥から①が本当に成り立っているのか，検証がいるのです。しかしながら，$\mathrm{PA}>0$，$\mathrm{PB}>0$ だから①〜⑥はすべて同値変形と考えて，逆のことまで言及しないのが普通なのです。

もう一つ例をあげれば，3 点 A，B，P があります。

A(0, 0), B(2, 0), 円 C：$(x-6)^2+y^2=9$ 上の点 P$(x,\ y)$ とします。

点 P が円 C 上を動くとき，△ABP の重心 G の軌跡を求めよ。という問があったとします。

これは当然円になりますが，ただし，3 点 A，B，P が同一直線上に並ぶときは，△ABP はつぶれてしまいますから，そのときの点 P(3, 0) と P(9, 0) は除く必要があります。

よって，$\mathrm{G}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{G}\left(\frac{11}{3},\ 0\right)$ は軌跡の点から除きます。

このように，逆は大丈夫かと，問題によって考える必要があります。

〈Q〉 一般に大学入試では教科書に載っていない公式は使わない方がよいと言われていますが，どの程度を言っているのでしょうか。

〈回答〉

公式の使用は扱う問題によります。出題者が何を聞いているかで，判断する必要があります。

解く途中でその公式が単なる計算で早く処理できるなら，採点に影響を与えるとは思いません。ただし，出題の意図が公式と密接な関係があるときは，使用しない方が無難です。数学の授業では，自分で公式を導ける力をつけることが最も大切であり，その力があれば，公式を使うべきかどうかの判断は自分でできるのではないでしょうか。

次回取り扱う問題

〈Q〉 円 $x^2+y^2=1$ ……① と放物線 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ ……② は，点 (0, −1) で接しますが，連立方程式で得られる $y^2+4y+3=0$ の解は $y=-1$，$y=-3$ であり，重解になっていません。何故でしょうか。また，解 $y=-3$ は，図形上どのような意味をもつのでしょうか。

「ドキ問」募集

全国の先生方からの“ドキッとする問題”「ドキ問」を募集しています。下記アドレスまでお寄せください。

E-mail：k.sugaku@tokyo-shoseki.co.jp