【4】対称式と数列

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

と定める。

(1) a_1，a_2，a_3 の値を求めよ。

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つことを示せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n は互いに素であることを示せ。

/'19 山梨大（工，生命環境）前期 2

解 答

(1) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\alpha+\beta=1,\ \ \alpha\beta=-1,\ \ a_n=\alpha^n+\beta^n$$

なので

$$\begin{aligned}
a_1&=\alpha+\beta=\mathbf{1}\\
a_2&=\alpha^2+\beta^2\\
&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\
&=1^2-2\cdot(-1)=\mathbf{3}\\
a_3&=\alpha^3+\beta^3\\
&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=\mathbf{4}
\end{aligned}$$

(2) α，β を解とする x についての 2 次方程式を作ると

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)(x-\beta)=0\\
\therefore\ \ &x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0\\
\therefore\ \ &x^2-x-1=0
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{cases}\alpha^2-\alpha-1=0\\ \beta^2-\beta-1=0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}\alpha^2=\alpha+1\\ \beta^2=\beta+1\end{cases}$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}
a_{n+2}&=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\\
&=\alpha^n\cdot\alpha^2+\beta^n\cdot\beta^2\\
&=\alpha^n(\alpha+1)+\beta^n(\beta+1)\\
&=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^n+\beta^n)\\
&=a_{n+1}+a_n
\end{aligned}$$

■

(3) 数学的帰納法で示す。
a_k と a_{k+1} がともに自然数であると仮定すると，
a_k+a_{k+1} は自然数なので，(2) の結果から a_{k+2} も自然数である。
$a_1=1$，$a_2=3$ とあわせて，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して a_n は自然数である。 ■

(4) 背理法で示す。
a_{k+2} と a_{k+1} が 1 より大きい公約数 d をもつと仮定すると

$$a_{k+2}=dA_{k+2},\ \ a_{k+1}=dA_{k+1}$$
$$(A_{k+2},\ A_{k+1}\text{: 自然数})$$

と表せて，(2) の結果から

$$\begin{aligned}
a_k&=a_{k+2}-a_{k+1}\\
&=dA_{k+2}-dA_{k+1}\\
&=d(A_{k+2}-A_{k+1})
\end{aligned}$$

とできる。
よって，a_k が d を約数にもつから，d は a_{k+1} と a_k の公約数である。
この議論を繰り返すことで，$a_2=3$ と $a_1=1$ も d を公約数にもつことになるが，d は 1 より大きいので矛盾する。
したがって，すべての自然数 n に対して，a_{n+1} と a_n は 1 より大きい公約数をもたない。つまり，a_{n+1} と a_n は互いに素である。 ■