【3】対称式と数列

2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ。

/'13 東京工業大（理・工・生命理工）前期 1(1)

解 答

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\alpha^n+\beta^n-3^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める。

方程式 $x^2-3x+5=0$ の解が α, β なので

$$\begin{cases}\alpha^2-3\alpha+5=0\\ \beta^2-3\beta+5=0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\alpha^2=3\alpha-5 & \cdots\cdots ①\\ \beta^2=3\beta-5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

したがって，① ② より

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}-3^{n+2}\\&=\alpha^n(3\alpha-5)+\beta^n(3\beta-5)-3^{n+2}\\&=3(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-5(\alpha^n+\beta^n)-3^{n+2}\\&=3(a_{n+1}+3^{n+1})-5(a_n+3^n)-3^{n+2}\\&=3a_{n+1}-5a_n-5\cdot 3^n \quad \cdots\cdots (*)\end{aligned}$$

とできる。

また，方程式 $x^2-3x+5=0$ における解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=3 \quad \cdots\cdots ③$$

であるから

$$a_1=\alpha+\beta-3=3-3=0$$

さらに

$$\begin{aligned}a_2&=\alpha^2+\beta^2-3^2\\&=(3\alpha-5)+(3\beta-5)-9 \quad (\because\ ①②)\\&=3(\alpha+\beta)-19\\&=3\cdot 3-19\\&=-10\end{aligned}$$

である。

さて，a_n がすべての正の整数 n について 5 の整数倍であることを，数学的帰納法で示す。

(I) a_k，a_{k+1} がともに 5 の整数倍であると仮定すると

$$a_k=5b_k,\ a_{k+1}=5b_{k+1} \quad (b_k,\ b_{k+1}:\text{整数})$$

とおけて，$(*)$ より

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=3a_{k+1}-5a_k-5\cdot 3^k\\&=3\cdot 5b_{k+1}-5\cdot 5b_k-5\cdot 3^k\\&=5(3b_{k+1}-5b_k-3^k)\end{aligned}$$

とできる。

$3b_{k+1}-5b_k-3^k$ は整数なので，a_{k+2} は 5 の整数倍である。

(II) $a_1=0$，$a_2=-10$ なので，a_1 と a_2 はともに 5 の整数倍である。

(I) (II) より，すべての正の整数 n に対して，a_n は 5 の整数倍である。 ■

（補足） 強引にツジツマをあわせて

$$\begin{aligned}&\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)\end{aligned}$$

から，$(*)$ を導いてもいいでしょう。