

【2】対称式の計算

$a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 3$ のとき $a^7 + b^7$ の値を求めよ。

/’17 昭和医科大 (医) I 期 1 月 27 日 4(1)

解答

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ が成り立つので

$$1^2 = 3 + 2ab \quad \therefore ab = -1$$

したがって

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= 4 \\ a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot (-1)^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) &= a^7 + a^3b^4 + a^4b^3 + b^7 \\ &= a^7 + b^7 + a^3b^3(a + b) \end{aligned}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 &= (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b) \\ &= 4 \cdot 7 - (-1)^3 \cdot 1 \\ &= \mathbf{29} \end{aligned}$$