

【1】無理数・対称式の計算

$x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)$ の値を求めよ。

/’20 名古屋市立大 (芸術工) 前期 2

解答

$x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき

$$\begin{aligned}x+y &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \\&= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\&= \frac{(4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3})}{2} \\&= 4 \\xy &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \\&= 1\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\&= 4^2 - 2 \cdot 1 \\&= 14 \\x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\&= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 \\&= 52\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(x^3+y^3) &= 14 \cdot 52 \\&= \mathbf{728}\end{aligned}$$