新連載

“ドキッ”とする生徒からの質問集

Part1

九州数学シンクタンクグループ

はじめに

長年，教壇に立っていると，ときどき生徒からドキッとするような鋭い質問を受けることがあります。

本シリーズでは，数学の教師が，つい“はてな”と，頭を抱えそうな問題を集めることにしました。

初任者を含め，若き先生が自信を持って授業に当たる一助になれば有り難く思います。九州数学シンクタンクから，前回の「高校数学を横に切る！」に引き続き，全国の若手教員に研究発表をお届けします。

今回取り扱う問題

Q1　$i+2>i+1$ は成り立つの？

Q2　$1-\pi<0$ は成り立つの？

Q3　$\log_2 x^2=2\log_2 x$ は成り立つの？

Q4　$\sqrt{x^2-2x+3}$ を x で割ると，$\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$ になるの？

Q5　数は 0 で割ってもよいときがあるの？

Q6　漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n$ のタイプの一般項はどう求めるの？

Q7　最小値×最小値 ＝ 最小値，
最小値＋最小値 ＝ 最小値 は成り立つの？

Q8　極線って何ですか？

〈Q1〉　$(i+2)-(i+1)=1>0$ であるから，
$i+2>i+1$ は成り立つのですか。

〈コメント〉

不等式の定義は実数条件の見落としが多いようです。ぜひ，しっかり指導しておくことが必要です。

〈回答〉

$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$ が成り立つのは，a，b が実数のときにかぎります。

したがって，$i+2>i+1$ は成り立ちません。

一般に虚数を含む複素数には大小関係を定めないのです。

仮に，$i>0$ で不等式の性質が成り立つとすれば，両辺を i 倍して

$$i^2>0 \quad つまり \quad -1>0$$

となり，不合理が生じます。

同様に，$i<0$ で不等式の性質が成り立つとすれば，両辺を i 倍して

$$i^2>0 \quad つまり \quad -1>0$$

となり，同様に不合理が生じます。

このように，$i>0$，$i<0$ は成り立たないので，虚数の大小関係は考えないのです。

〈Q2〉　中間値の定理を使った証明で

$f(x)=\sin x-x+1$ とおき，$y=f(x)$ は連続で

$$f(0)=1>0$$
$$f(\pi)=1-\pi<0 \text{ より}$$

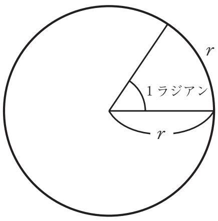
$\sin x-x+1=0$ は，$0\leqq x\leqq \pi$ の範囲において少なくとも 1 つの解をもつ。と解答にありますが，そもそも $f(\pi)=1-\pi$ について考えると，1 はスカラー，π はラジアンであり，$(1-\pi)$ の符号は決められるのですか。

〈コメント〉

ラジアンについては，授業であっさり教えてしまうところです。改めてたずねられるとドキッとします。

〈回答〉

確かに π ラジアン ＝ 180° だから，$1-\pi$ は存在しないように思えますが，弧度法の単位ラジアンは，半径と弧長の比の値として定義しているもので，ラジアンと実数を同一視しているのです。



したがって，$\pi=3.14\cdots$ という実数扱いですから $1-\pi<0$ が成り立っているのです。

〈Q3〉　方程式 $\log_2 x^2=4$ の問題で，真数条件から x は 0 でない実数である。

与式より　　$2\log_2 x=4$

$$\log_2 x=2$$

よって　　$x=4$ と解きました。

答を見ると，$x=\pm4$ とあり，このやり方では $x=-4$ が出てきません。何故でしょうか。

〈コメント〉

真数条件を考えさせるよい題材になります。

〈回答〉

$\log_2 x^2$ については

$x>0$ のとき　　$\log_2 x^2 = 2\log_2 x$

$x<0$ のとき　　$\log_2 x^2 = 2\log_2(-x)$ です。

したがって $\log_2 x^2 = 2\log_2|x|$ という式を立てて，解けばよいのです。

したがって　　$\log_2|x| = 2$

$$|x| = 4$$

よって　　$x=\pm 4$　が導けます。

〈Q4〉 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1} = -\infty$$

は，何故，だめなのですか。

〈コメント〉

$x=-t$ とおいて解くのが定石ですが，強引に x で割ると失敗が多いようです。

〈回答〉

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{-x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$ とすべきです。

〈Q5〉「$x=\sqrt{2}+1$ のとき，x^3-3x^2-4 の値を求めよ。」という問題で，解答では，

$x-1=\sqrt{2}$　より　$x^2-2x-1=0$

x^3-3x^2-4 を x^2-2x-1 で割ると

商が $x-1$，余り $-x-5$

答は余りに $x=\sqrt{2}+1$ を代入して，$-6-\sqrt{2}$

として解いてますが，$x^2-2x-1=0$ であり，求める値を 0 で割ってはいけないのではないでしょうか。

〈コメント〉

よく使う式変形ですが，生徒の中には不思議に思っている者もいます。

〈回答〉

確かに，数を 0 で割ってはいけません。

ただし，この計算は

$$x^3-3x^2-4 = (x^2-2x-1)(x-1)+(-x-5)$$

という恒等式の変形であり，問題はありません。

ところで，次の式変形はどこがミスでしょうか。（生徒に考えさせるとよいでしょう。）

$a=b+0$ ……① があります。

a 倍して	$a^2=ab$	……②
b^2 を引いて	$a^2-b^2=ab-b^2$	……③
因数分解して	$(a+b)(a-b)=b(a-b)$	……④
$(a-b)$ で割って	$a+b=b$	……⑤
$a=b$ より	$2a=a$	……⑥
a で割って	$2=1$	……⑦

〈Q6〉 $a_{n+1}=3a_n+n+2$ は，

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta = 3(a_n+\alpha n+\beta)$ として，

等比数列を作って解きますが

$a_{n+1}=3a_n+2^n$ は，

$a_{n+1}+\alpha\cdot 2^{n+1} = 3(a_n+\alpha\cdot 2^n)$ として，解かないのですか。

〈コメント〉

漸化式は，様々な解法にチャレンジさせた方がよいでしょう。

〈回答〉

もちろん，$a_{n+1}+\alpha\cdot 2^{n+1} = 3(a_n+\alpha\cdot 2^n)$ より

$$a_{n+1} = 3a_n+\alpha\cdot 2^n$$

したがって，$\alpha=1$ として $a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$ が成り立ちます。

$\{a_n+2^n\}$ は初項 a_1+2，公比 3 の等比数列ですから

$$a_n+2^n = (a_1+2)\cdot 3^{n-1}$$

$a_n = (a_1+2)\cdot 3^{n-1}-2^n$ として解けます。

一般に，$a_{n+1}=pa_n+q^n$ のタイプでは，

$a_{n+1}+\alpha\cdot q^{n+1} = p(a_n+\alpha\cdot q^n)$ として

$a_{n+1} = pa_n+(p-q)\alpha\cdot q^n$ より

$p-q\neq 0$ のとき，$\alpha=\dfrac{1}{p-q}$ として確定しますが，

$p-q=0$，つまり，$p=q$ のとき α の値が確定しません。

したがって，このタイプは両辺を p^{n+1} で割ったり，両辺を q^{n+1} で割ったりして解くことが多いのです。

〈Q7〉 $a>0$，$b>0$ のとき，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)$ の最小値は，相加平均・相乗平均の関係から 8 となりましたが，実際の値は 9 となっています。どこがまちがっているのでしょうか。

〈コメント〉

最小値×最小値 ＝ 最小値　に必ずしもならないことを

確認したい問題です。

〈回答〉

確かに生徒が言うように

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b} \geqq 4\sqrt{\frac{1}{ab}} \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 8$ となりますが

①の等号成立は　$a=b$ のとき

②の等号成立は　$\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$ のとき，つまり $a=\frac{b}{4}$ のときです。

したがって　$a>0$，$b>0$ のとき，$a=b$ と $a=\frac{b}{4}$ は同時に成り立たないので，

$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=8$ は成り立ちません。

このように，必ずしも 最小値×最小値 = 最小値 にならないことがあるのです。

正解は

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5$$

$$\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5 \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5=9$$

したがって　最小値は 9

等号成立は　$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$ のときですから，

$b^2=4a^2$ より，$b=2a$ のときです。

〈発展〉

ここで，$a_1>0$，$a_2>0$，$a_3>0$ のとき，

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

が成り立つことを証明してみよう。

〔証明〕　左辺－右辺 $=\dfrac{a_1+a_2+a_3-3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{3}$

$$\text{分子}=(\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[3]{a_3})\{(\sqrt[3]{a_1})^2+(\sqrt[3]{a_2})^2+(\sqrt[3]{a_3})^2-(\sqrt[3]{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_2a_3}+\sqrt[3]{a_3a_1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[3]{a_3})\times\{(\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2})^2+(\sqrt[3]{a_2}-\sqrt[3]{a_3})^2+(\sqrt[3]{a_3}-\sqrt[3]{a_1})^2\} \geqq 0$$

等号成立は　$a_1=a_2=a_3$ のときにかぎる。

ところで，$a>0$ のとき $a+\frac{1}{a^2}$ の最小値を求めなさい。

という問に対して

(A)　$$a+\frac{1}{a^2}=\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}+\frac{1}{a^2}$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{a^2}}=3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}=\sqrt[3]{6}$$

(B)　$$a+\frac{1}{a^2}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{a^2}$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

とすると，等号成立の条件は極めて重要です。

一方，$\sin x+\cos x$ において $-1 \leqq \sin x \leqq 1$，$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より $-2 \leqq \sin x+\cos x \leqq 2$ として $\sin x+\cos x$ の最小値を -2，最大値を 2 とする生徒を時折見かけますが

最小値＋最小値 = 最小値

最小値×最小値 = 最小値

は，必ずしも成り立たないことをはっきりと示しておくべきです。

〈Q8〉　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 A$(2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$ における接線は $2\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}\,y=25$ になります。

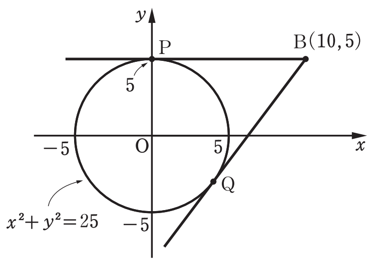
これは，$x=2\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ を x，y にそれぞれ 1 つずつ代入した形です。

ところで，円の外部の点 B(10, 5) を代入した $10x+5y=25$ は，図形上どのような意味をもつのでしょうか。

〈コメント〉

教科書では，ここまで踏み込みませんが，入試にはときどき顔を出すので，一度，指導しておきたい問題です。

〈回答〉



円の外部の点 B(10, 5) を通る接線は 2 本あります。

このとき，接点を

P$(x_1,\ y_1)$，

Q$(x_2,\ y_2)$

とすると，それぞれの接線は

$$x_1x+y_1y=25$$
$$x_2x+y_2y=25$$

です。これらの接線は点 B(10, 5) を通るので

$$10x_1+5y_1=25 \quad \cdots\cdots①$$
$$10x_2+5y_2=25 \quad \cdots\cdots②$$

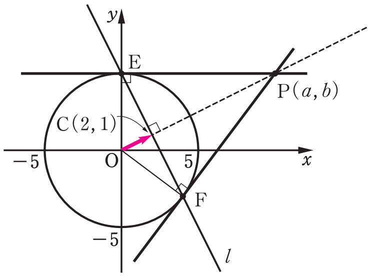
が成り立ちます。

①，②より，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ は $10x+5y=25$ を満たしていることになります。

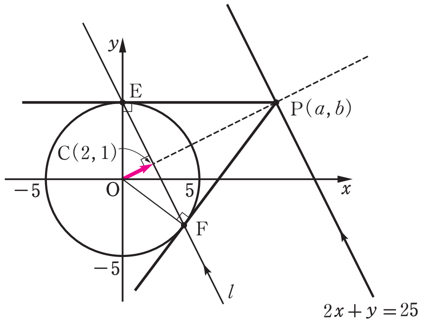
したがって，$10x+5y=25$ は，点 B(10, 5) から円に接線を引いたときにできる 2 つの接点を結ぶ直線になります。

〈発展〉

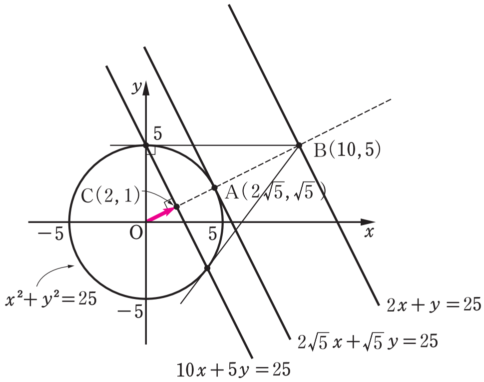
$10x+5y=25$
は，点 B(10，5)
を**極**とする**極線**
といいます。
ところで，円の
内部の点 C(2,1)
を代入した
$2x+y=25$
は，図形上どのような意味をもつのでしょうか。



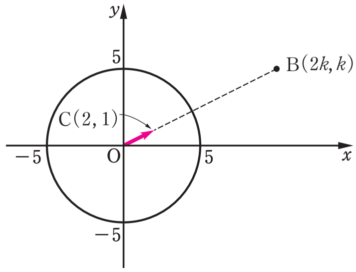
$2x+y=25$ の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OC}=(2,\ 1)$ です。
したがって，$2x+y=25$ は，点 C(2，1) を通り，$\overrightarrow{OC}$ に垂直な直線 l と平行な直線になります。
このとき，直線 l と円の交点を E，F とします。
当然，直線 l を極線とする極 P(a，b) は直線 OC 上にあります。
極線 l は $ax+by=25$ と表せます。
極線 l は点 C(2，1) を通るので，$2a+b=25$ が満たされています。
これは，$2x+y=25$ は点 P(a，b) を通ることを示しています。
したがって，$2x+y=25$ は，直線 l を極線とする極 P(a，b) を通り，直線 l に平行な直線と言えます。



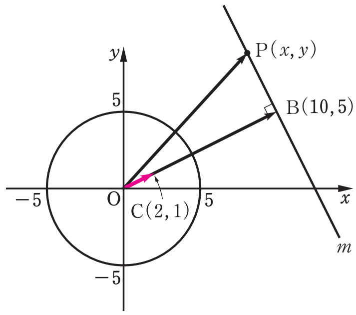
これらをまとめてみると，下図のようになります。



また，別の視点で考えると，



$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OC}=k(2,\ 1)=(2k,\ k)$
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=25$
となるように点Bをとります。
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=4k+k=25$
$k=5$
よって，点 B(10，5) となります。
ここで，点 B(10，5) を通り，$\overrightarrow{OC}=(2,\ 1)$ に垂直な直線 m を引きます。



直線 m 上の任意の点を P(x，y) とおくと

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=2x+y$ ……①
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP})$
$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BP}$
$=25$ ……②

①，②より $2x+y=25$ が得られます。
つまり，$2x+y=25$ は，円 $x^2+y^2=25$ に関して $|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|=25$ を満たす点 C の**反転**である点 B を通り，$\overrightarrow{OC}$ に垂直な直線になります。

次回取り扱う問題

Q 方程式 $(x^2+y^2-4)+k(x^2+y^2-8x+15)=0$ で，$k=-1$ として得られる直線は図形上どのような意味をもつのでしょうか。

「ドキ問」募集

全国の先生方からの“ドキッとする質問”「ドキ問」を募集しています。下記アドレスまでお寄せください。
E-mail：k.sugaku@tokyo-shoseki.co.jp