[3]　$S=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2026}$ とおく。

S の整数部分，すなわち $n \leqq S < n+1$ を満たす自然数 n を求めることを考えます。
なお，対数は自然対数です。

(1)　k を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$$

(2)　次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2026} < \log 2026$$

(3)　次の不等式を証明しなさい。

$$\log 2026 - \log 3 < \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2025}$$

(4)　S の整数部分を求めなさい。ただし，必要なら次の値を利用してよい。

$$\log 3 = 1.10\,,\quad \log 2026 = 7.61$$

[解]

(1)　関数 $\dfrac{1}{x}$ は区間 $0<x$ において減少関数であるから

$k \leqq x \leqq k+1$ において $\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$ より　　$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$

$k-1 \leqq x \leqq k$ において $\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{x}$ より　　$\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$

ゆえに　　$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$

(2)　(1)を利用して

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2026}$$

$$< \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x}\,dx + \cdots\cdots + \int_{2025}^{2026} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_1^{2026} \frac{1}{x}\,dx = \left[\log x\right]_1^{2026} = \log 2026 - \log 1 = \log 2026$$

(3)　(1)を利用して

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2025}$$

$$>\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx+\int_4^5 \frac{1}{x}\,dx+\int_5^6 \frac{1}{x}\,dx+\cdots\cdots+\int_{2025}^{2026} \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int_3^{2026} \frac{1}{x}\,dx=[\log x]_3^{2026}=\log 2026-\log 3$$

(4)　(2)より　　$S<1+\log 2026=1+7.61=8.61$

　(3)より　　$S>1+\dfrac{1}{2}+\log 2026-\log 3=1+0.5+7.61-1.10=8.01$

よって　　$8.01<S<8.61$

すなわち，S の整数部分は　**8**　　　……(答)

[コメント]

難しい。(1)は有名な誘導である。

しかし，S をそのまま扱おうとすると誤差が大きすぎるので

(2)，(3)のような誘導を付けた。それでも難しいと思う。

なお，2900 年頃までは，整数部分は 8 である。

すなわち，この問題は微修正により 900 年間使える。