

[2]  $x, y$  の方程式

$$101x + 2026y = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

を考える。ただし、 $x, y$  はともに整数である。

(1)  $y$  が次の値をとるとき、方程式①の  $x$  も整数となるのはどれですか。

- (ア) 15 (イ) 16 (ウ) 17 (エ) 18

(2) 方程式①を満たす整数の組  $(x, y)$  のうち、 $y$  の値が 2026 に最も近い、すなわち  $|y - 2026|$  が最小となるときの  $(x, y)$  を求めなさい。

[解]

(1) ①より  $101x = 1 - 2026y$

$y = 15$  のとき  $101x = -30389$  これを満たす整数  $x$  はない。

$y = 16$  のとき  $101x = -32415$  これを満たす整数  $x$  はない。

$y = 17$  のとき  $101x = -34441$  よって  $x = -341$

$y = 18$  のとき  $101x = -36467$  これを満たす整数  $x$  はない。

以上より (ウ) 17 .....(答)

(2) (1)より  $101 \times (-341) + 2026 \times 17 = 1$

これと①より  $101 \times (x + 341) + 2026(y - 17) = 0$

$$101 \times (x + 341) = -2026(y - 17)$$

この式の右辺は 2026 の倍数であるから、左辺も 2026 の倍数である。

ところが、101 と 2026 は互いに素であるから、 $x + 341$  が 2026 の倍数である。

よって、 $t$  を整数として

$$x + 341 = 2026t, y - 17 = -101t$$

ゆえに  $x = 2026t - 341, y = -101t + 17$  ( $t$  は整数)

$$\text{このとき } |y - 2026| = |-101t + 17 - 2026| = |-101t - 2009| = |101t + 2009|$$

ここで、 $(-2009) \div 101 = -19.89 \dots \dots$  であり

$$t = -19 \text{ のとき } |101 \times (-19) + 2009| = 90$$

$$t = -20 \text{ のとき } |101 \times (-20) + 2009| = 11$$

したがって、 $y$  の値が 2026 に最も近いのは、 $t = -20$  のときであり、

このとき  $(x, y) = (-40861, 2037)$  .....(答)

[コメント]

やや難しい。これも、類題はないと思う。

特殊解を 1 組見つけるのが簡単ではないので、(1)の誘導を付けた。

(2)は、 $x$  はやめて、 $y$  だけ答えさせてもよい。

なお、西暦 2026 年は、昭和 101 年である。