

[2] x, y の方程式

$$101x + 2026y = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。ただし、 x, y はともに整数である。

(1) y が次の値をとるとき、方程式①の x も整数となるのはどれですか。

(ア) 15 (イ) 16 (ウ) 17 (エ) 18

(2) 方程式①を満たす整数の組 (x, y) のうち、 y の値が 2026 に最も近い、すなわち $|y - 2026|$ が最小となるときの (x, y) を求めなさい。

[解]

(1) ①より $101x = 1 - 2026y$

$y = 15$ のとき $101x = -30389$ これを満たす整数 x はない。

$y = 16$ のとき $101x = -32415$ これを満たす整数 x はない。

$y = 17$ のとき $101x = -34441$ よって $x = -341$

$y = 18$ のとき $101x = -36467$ これを満たす整数 x はない。

以上より (ウ) 17 $\cdots \cdots$ (答)

(2) (1)より $101 \times (-341) + 2026 \times 17 = 1$

これと①より $101 \times (x + 341) + 2026(y - 17) = 0$

$$101 \times (x + 341) = -2026(y - 17)$$

この式の右辺は 2026 の倍数であるから、左辺も 2026 の倍数である。

ところが、101 と 2026 は互いに素であるから、 $x + 341$ が 2026 の倍数である。

よって、 t を整数として

$$x + 341 = 2026t, \quad y - 17 = -101t$$

ゆえに $x = 2026t - 341, \quad y = -101t + 17$ (t は整数)

このとき $|y - 2026| = |-101t + 17 - 2026| = |-101t - 2009| = |101t + 2009|$

ここで、 $(-2009) \div 101 = -19.89 \cdots \cdots$ であり

$$t = -19 \text{ のとき } |101 \times (-19) + 2009| = 90$$

$$t = -20 \text{ のとき } |101 \times (-20) + 2009| = 11$$

したがって、 y の値が 2026 に最も近いのは、 $t = -20$ のときであり、

このとき $(x, y) = (-40861, 2037)$ $\cdots \cdots$ (答)

[コメント]

やや難しい。これも、類題はないと思う。

特殊解を 1 組見つけるのが簡単ではないので、(1)の誘導を付けた。

(2)は、 x はやめて、 y だけ答えさせてもよい。

なお、西暦 2026 年は、昭和 101 年である。