

10月4問目

a を正の実数とする。

(1) a が 1 でないとき、複素数 z についての方程式

$$a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

を考える。この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式

$$|z|^2 = 6-a, \quad a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

/ '25 北海道大 (理系) 前期 4

解答

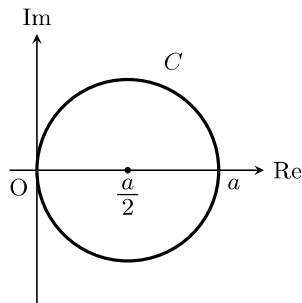
(1) $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a|z-1| &= |(a-2)z+a| \\ \iff a^2|z-1|^2 &= |(a-2)z+a|^2 \\ \iff a^2(z-1)(\bar{z}-1) &= \{(a-2)z+a\}\{(a-2)\bar{z}+a\} \\ \iff a^2(z\bar{z}-z-\bar{z}+1) &= (a-2)^2z\bar{z}+a(a-2)z+a(a-2)\bar{z}+a^2 \\ \iff (4a-4)z\bar{z}-(2a^2-2a)z-(2a^2-2a)\bar{z} &= 0 \\ \iff z\bar{z}-\frac{a}{2}z-\frac{a}{2}\bar{z} &= 0 \\ \iff \left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{a}{2}\right) &= \frac{a^2}{4} \\ \iff \left|z-\frac{a}{2}\right|^2 &= \frac{a^2}{4} \\ \iff \left|z-\frac{a}{2}\right| &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

とできるので、点 z 全体の集合は、下図のような

中心 $\frac{a}{2}$ 、半径 $\frac{a}{2}$ の円 C

となる。



(2) $a > 0$ のもとで連立方程式

$$\begin{cases} |z|^2 = 6-a & \dots\dots ① \\ a|z-1| = |(a-2)z+a| & \dots\dots ② \end{cases}$$

を考える。

イ) $a \neq 1$ の場合

① を満たす複素数 z は

$$6-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 6$$

のときに存在し、① は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6-a}$ の円 D (半径が 0 の場合はただ 1 点 O) を表す。

② は (1) の円 C を表すので、① かつ ② を満たす複素数 z が存在する為の条件は「 $(a \neq 1$ かつ $0 < a \leq 6)$ のもとで 2 円 C と D が共有点をもつこと」である。つまり

$$\begin{cases} a \neq 1 \text{ かつ } 0 < a \leq 6 \\ \sqrt{6-a} \leq a \end{cases}$$

である。

今、 $\sqrt{6-a} \leq a$ は両辺ともに 0 以上だから 2 乗してよく

$$6-a \leq a^2 \quad \therefore (a+3)(a-2) \geq 0$$

$a \neq 1$ かつ $0 < a \leq 6$ に注意して

$$2 \leq a \leq 6$$

ロ) $a = 1$ の場合

① かつ ② は

$$\begin{cases} |z|^2 = 5 & \dots\dots ①' \\ |z-1| = |-z+1| & \dots\dots ②' \end{cases}$$

となり、①' は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円を表し、②' は任意の複素数 z に対して成り立つから、①' かつ ②' を満たす複素数 z は存在する。

以上から、求める a の値の範囲は

$$a = 1, \quad 2 \leq a \leq 6$$