

10月3問目

次の問いに答えなさい。

- (1) 不定積分 $\int \log(x+2) dx$ を求めなさい。
- (2) 前問 (1) を用いて、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k}{n} + 2\right)$ を求めなさい。
- (3) 前問 (2) を用いて、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n)!}{n^n(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めなさい。

/ '25 長岡技術科学大 (工) 前期 3

解答

(1) 部分積分法により

$$\begin{aligned} & \int \log(x+2) dx \\ &= \int (x+2)' \log(x+2) dx \\ &= (x+2) \log(x+2) - \int (x+2) \cdot \frac{1}{x+2} dx \\ &= (x+2) \log(x+2) - \int dx \\ &= (x+2) \log(x+2) - x + C \end{aligned}$$

ただし、 C は積分定数。

(2) 区分求積法により

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k}{n} + 2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \log\left(\frac{k}{n} + 2\right) \cdot \frac{1}{n} \right\} \\ &= \int_0^1 \log(x+2) dx \\ &= \left[(x+2) \log(x+2) - x \right]_0^1 \\ &= 3 \log 3 - 2 \log 2 - 1 \end{aligned}$$

(補足) 「前問 (1) を用いて」を無視すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \log\left(\frac{k}{n} + 2\right) \cdot \frac{1}{n} \right\} = \int_2^3 \log x dx$$

とできる。

(3) n を自然数として

$$a_n = \left(\frac{(3n)!}{n^n(2n)!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

とする。両辺の自然対数をとれば

$$\begin{aligned} \log a_n &= \log \left(\frac{(3n)!}{n^n(2n)!} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{(3n)(3n-1)(3n-2) \cdots (2n+1)}{n^n} \\ &= \frac{1}{n} \log \left(3 \left(3 - \frac{1}{n} \right) \left(3 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(2 + \frac{k}{n} \right) \end{aligned}$$

とできるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(2 + \frac{k}{n} \right) \\ &= 3 \log 3 - 2 \log 2 - 1 \\ &= \log \frac{27}{4e} \end{aligned}$$

$\log x$ は単調に増加する連続関数であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{27}{4e}$$