

10月2問目

数直線上に異なる2点 A, B をとる。1 個のさいころを投げたとき、次の規則で点 P は A または B の位置に動く。

- (i) 点 P が A の位置にあるときは、2 以下の目が出たら B に移り、3 以上の目が出たら A にとどまる。
- (ii) 点 P が B の位置にあるときは、3 以下の目が出たら A に移り、4 以上の目が出たら B にとどまる。

はじめに点 P は A の位置にあるとし、さいころを n 回続けて投げたとき、点 P が A の位置にある確率を p_n とする。 $p_1 = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ であり、 $p_2 = \frac{\text{ウエ}}{\text{オカ}}$ となる。また、さいころを n 回続けて投げたときに、点 P が B の位置にある確率は $\frac{\text{キ}}{\text{ク}} - p_n$ と表すことができる。このことから、

$$p_{n+1} = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} p_n + \frac{\text{コ}}{\text{サ}} (\frac{\text{キ}}{\text{ク}} - p_n)$$

となり、この漸化式から

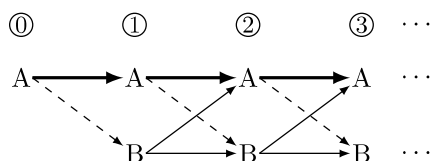
$$p_n = \frac{\text{シ}}{\text{スセ}} \left(\frac{\text{ソ}}{\text{タ}} \right)^{n-1} + \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$$

となる。

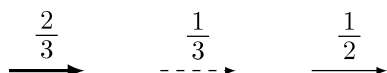
/ '25 名城大 (薬) A・F 方式 3

解答

題意から、点 P の位置の推移は次図のようになる。



ただし、各矢印の推移確率は



である。

したがって、さいころを 1 回投げたとき、点 P が A の位置にある確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{2}{3}$$

であり、さいころを 2 回投げたとき、点 P が A の位置にある確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{18}$$

となる。

さいころを n 回投げたときに、点 P が B の位置にある確率は、点 P が A の位置にない確率であるから $1 - p_n$ と表せる。

推移図より、さいころを $n + 1$ 回投げたとき、点 P が A の位置にあるのは

- n 回投げたときに A にあって、確率 $\frac{2}{3}$ で推移する場合
- n 回投げたときに B にあって、確率 $\frac{1}{2}$ で推移する場合

の 2 パターンであるから、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{2} (1 - p_n) = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。これは

$$p_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{3}{5} \right)$$

とできるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{3}{5} \right\}$ が公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であり

$$p_n - \frac{3}{5} = \left(p_1 - \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} + \frac{3}{5}$$