

10月1問目

$a, b$  を実数の定数とし、関数  $f(x)$  を  $f(x) = (x-1)(x^2 + 2ax + b)$  と定める。

- (1)  $f(x) = 0$  がただ 1 つの実数解をもつための  $a$  と  $b$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (2)  $f(x) = 0$  が異なる 3 つの実数解をもつための  $a$  と  $b$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (3)  $f(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解をもつための  $a$  と  $b$  に関する必要十分条件を求めよ。

/ '25 室蘭工業大（理工）前期 3

**解答**

$f(x) = (x-1)(x^2 + 2ax + b)$  なので

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \text{ または } x^2 + 2ax + b = 0$$

$g(x) = x^2 + 2ax + b$  とすると

$$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + b$$

とできる。

(1)  $f(x) = 0$  がただ 1 つの実数解をもつことは、  
「 $g(x) = 0$  が  $x = 1$  を重解にもつ、または、 $g(x) = 0$   
が実数解をもたない」と同値である。その為の条件は

$$\begin{cases} a = -1 \\ -a^2 + b = 0 \end{cases} \text{ または } -a^2 + b > 0$$

であるから、求める必要十分条件は

$$(a, b) = (-1, 1) \text{ または } b > a^2$$

〈注〉「重解は 1 つの解と数える」と解釈した。

(2)  $f(x) = 0$  が異なる 3 つの実数解をもつことは、  
「 $g(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解をもち、それらが 1  
でない」と同値である。その為の条件は

$$\begin{cases} g(1) \neq 0 \\ -a^2 + b < 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 1 + 2a + b \neq 0 \\ b < a^2 \end{cases}$$

(3)  $f(x) = 0$  の異なる実数解の個数がちょうど 2 で  
あることは、「 $g(x) = 0$  が 1 でない重解をもつ、また  
は、 $g(x) = 0$  が 1 を単解としてもつ」と同値である。  
その為の条件は

$$\begin{cases} -a \neq 1 \\ -a^2 + b = 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} g(1) = 0 \\ -a \neq 1 \end{cases}$$

であるから、求める必要十分条件は

$$\begin{cases} a \neq -1 \\ b = a^2 \end{cases} \text{ または } 1 + 2a + b = 0$$

〈注〉「異なる実数解の個数がちょうど 2 である」と解釈した。