8月2問目

関数 $f(x)=8^x+4^x+4^{-x}+8^{-x}$ について，次の問に答えよ。

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，4^x+4^{-x} および 8^x+8^{-x} を t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

/'19 香川大（創造工 A）前期 3

解 答

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおくとき

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x+2^{-x})^2 \\ &= (2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2 \\ &= 4^x+2+4^{-x} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{4^x+4^{-x}=t^2-2}$$

$$\begin{aligned} t^3 &= (2^x+2^{-x})^3 \\ &= (2^x)^3+3\cdot(2^x)^2\cdot 2^{-x} \\ &\qquad +3\cdot 2^x\cdot(2^{-x})^2+(2^{-x})^3 \\ &= 8^x+3(2^x+2^{-x})+8^{-x} \\ &= 8^x+3t+8^{-x} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{8^x+8^{-x}=t^3-3t}$$

(2) $2^x>0$，$2^{-x}>0$ なので，相加・相乗平均の関係より

$$2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}} \qquad \therefore\ t\geqq 2$$

が成り立つ。
逆に，$t\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} &2^x+2^{-x}=t \\ \iff\ &(2^x)^2-t\cdot 2^x+1=0 \\ \iff\ &2^x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2} \end{aligned}$$

とでき，$t\geqq 2$ から

$$0\leqq t^2-4 \text{ かつ } \sqrt{t^2-4}<t \qquad \therefore\ 2^x>0$$

が成り立つので，適切な実数 x が存在する。
以上から，t のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{t\geqq 2}$$

別 解

$h(x)=2^x+2^{-x}$ とすると

$$h'(x)=2^x\log 2-2^{-x}\log 2=(2^x-2^{-x})\log 2$$

よって，$h(x)$ の増減は次表の通りである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

また

$$h(0)=2^0+2^0=2, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}h(x)=\infty$$

なので，$t=h(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{t\geqq 2}$$

(3) (1) から

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^3-3t)+(t^2-2) \\ &= t^3+t^2-3t-2 \end{aligned}$$

とできるので

$$g(t)=t^3+t^2-3t-2\ \ (2\leqq t)$$

の最小値を求める。ここで

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2+2t-3 \\ &= 3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。この 2 次関数 $g'(t)$ の軸は $-\dfrac{1}{3}$ で

$$g'(2)=3\cdot 2^2+2\cdot 2-3=13>0$$

なので，$2<t$ において $g'(t)>0$ である。
よって，$2\leqq t$ において $g(t)$ は単調に増加するから，$g(t)$ の最小値は

$$g(2)=2^3+2^2-3\cdot 2-2=\boldsymbol{4}$$

である。
このとき $t=2$ であり，これは (2) における等号成立だから

$$2^x=2^{-x} \qquad \therefore\ \boldsymbol{x=0}$$