8月1問目

正の整数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

/'22 東北大（理系）前期 3

解 答

(1) まず，$x>0$ において，示すべき不等式を同値変形する。

$$\begin{aligned}&\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}\quad\cdots\cdots ①\\ \iff\ &\frac{2+2x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}\leqq\frac{2+x}{2}\quad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

この ② の各辺は正なので，2 乗しても同値である。よって

$$\begin{aligned}② &\iff \left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^2\leqq 1+x\leqq\left(\frac{2+x}{2}\right)^2\\ &\iff \begin{cases}(2+2x)^2\leqq(1+x)(2+x)^2\\ 4(1+x)\leqq(2+x)^2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}0\leqq x^3+x^2\\ 0\leqq x^2\end{cases}\quad\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

とでき，$x>0$ のとき ③ は成り立つので，① も成り立つ。 ■

(2) (1) で示した不等式に $x=\dfrac{k}{n^2}\ (>0)$ を代入すると

$$\frac{\dfrac{k}{n^2}}{2+\dfrac{k}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

となる。また，$k\leqq n$ なので

$$\begin{aligned}&2+\frac{n}{n^2}\geqq 2+\frac{k}{n^2}\\ \therefore\ &\frac{\dfrac{k}{n^2}}{2+\dfrac{n}{n^2}}\leqq\frac{\dfrac{k}{n^2}}{2+\dfrac{k}{n^2}}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{\dfrac{k}{n^2}}{2+\dfrac{n}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

が成り立つから，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として辺々を足すことで

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{k}{n^2}}{2+\dfrac{n}{n^2}}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+n}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$$

が成り立つ。

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{2}{n}}\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}}$$